



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

GRUPOS TOPOLÓGICOS

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

GERARDO GUTIÉRREZ ALEJANDRE

ASESORES DE TESIS:

DR. FÉLIX CAPULÍN PÉREZ

DR. DAVID MAYA ESCUDERO

Toluca, Estado de México, 2025



CONTENIDO

Contenido	3
Prefacio	5
1 Preliminares	6
1.1 Topología General	6
1.1.1 Conceptos elementales	6
1.1.2 Funciones continuas	10
1.1.3 Topología producto	12
1.1.4 Axiomas de separación	12
1.1.5 Límites inversos	13
1.1.6 Conexidad, compacidad y compacidad local	16
1.1.7 Espacios métricos	18
1.1.8 Redes, filtros y ultrafiltros	20
1.1.9 Espacio de funciones	22
1.1.10 Topología identificación	22
1.1.11 Resultados adicionales	23
1.2 Teoría de Grupos	26
1.2.1 Conceptos elementales	26
1.2.2 Homomorfismos	31
1.2.3 G -conjuntos	32
2 Grupos semi-topológicos	33
2.1 El concepto de grupo semi-topológico	33
2.2 Sistema de vecindades del neutro de un grupo topológico	35
2.3 Generación de grupos semi-topológicos	36
2.4 Inmersión de un grupo en un producto directo	38

2.5	$\mathfrak{G}$ -topologías y grupos semi-topológicos	39
3	Grupos topológicos	45
3.1	El concepto de grupo topológico	45
3.2	Condiciones para que un grupo semi-topológico sea grupo topológico	52
3.2.1	Grupos semi-topológicos de tipo-C y tipo-B	53
3.2.2	Grupos semi-topológicos localmente compactos	57
3.3	Sistemas de vecindades del neutro	60
3.4	Axiomas de separación y pseudométricas invariantes	64
3.4.1	Pseudo-normas	65
3.5	Subgrupos topológicos	75
3.6	Grupo cociente	85
3.7	G -espacios	93
3.8	Productos y límites inversos de grupos topológicos	94
3.9	Grupos topológicos localmente compactos	104
4	Subgrupos de $\mathbb{R}^n$	109
4.1	Subgrupos de $(\mathbb{R}, +)$	109
4.2	Subgrupos de $(\mathbb{R}^n, +)$	112
5	Ejemplos importantes	122
5.1	Grupos profinitos	122
5.2	Grupos de matrices	127
5.3	Solenoide p -ádico	134
	Bibliografía	140

INTRODUCCIÓN

La topología, como rama de las matemáticas, tiene sus raíces en los trabajos de figuras clave a lo largo de los últimos siglos. Avances en el análisis matemático por Augustin-Louis Cauchy y Karl Weierstrass influyeron en la comprensión de la continuidad, mientras que Georg Cantor, con su teoría de conjuntos, introdujo ideas cruciales sobre la estructura de los conjuntos. En el siglo XIX, Henri Poincaré y David Hilbert formalizaron aspectos fundamentales de la topología. Finalmente, en el siglo XX, Felix Hausdorff estableció la noción de espacio topológico. Los grupos topológicos surgen como una intersección de la topología y el álgebra, dotando a un grupo con una topología y una cierta condición de compatibilidad entre estas dos estructuras. En un inicio la Teoría de Grupos Topológicos surgió como un estudio de los grupos de Lie. Actualmente, y a pesar de haber una cantidad de trabajos sobre grupos topológicos, aún hay muchas cosas que se desconocen.

1. PRELIMINARES

En este capítulo presentaremos conceptos y resultados básicos de topología y álgebra abstracta que estaremos usando a lo largo del presente trabajo.

1.1 Topología General

Las pruebas de las proposiciones y teoremas presentados en esta sección pueden ser encontrados en [3].

1.1.1 Conceptos elementales

Definición. Dado un conjunto X , una **topología** sobre X es una familia τ de subconjuntos de X que satisface las siguientes tres propiedades:

- 1) $\emptyset, X \in \tau$;
- 2) si $U, V \in \tau$, entonces $U \cap V \in \tau$;
- 3) si $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \tau$, entonces $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$.

A la pareja (X, τ) se le llama **espacio topológico**, en algunas ocasiones el espacio topológico se denotará como X_τ .

Definición. Sea $A \subseteq X$. Decimos que A es:

1. **abierto** de X , si $A \in \tau$;
2. **cerrado** de X , si $X \setminus A \in \tau$;
3. **vecindad de un punto** $x \in X$, si existe $U \in \tau$ tal que $x \in U \subseteq A$.

Ejemplos:

1. Sea X cualquier conjunto, entonces las familias $\mathcal{P}(X)$ y $\{\emptyset, X\}$ son topologías para X , llamadas **topología discreta** y **topología indiscreta** respectivamente. Estas son las llamadas *topologías triviales*.
2. Sea $n \in \mathbb{N}$. Para $\mathbb{R}^n$, definimos los elementos de la familia τ_u como sigue:

$$U \in \tau_u$$

$$\iff$$

$$\forall x \in U, \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que si } y \in \mathbb{R}^n \text{ cumple que } \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} < \delta, \text{ entonces } y \in U.$$

La familia τ_u resulta ser una topología para $\mathbb{R}^n$ que llamaremos **topología usual** para $\mathbb{R}^n$.

Definición. Sea (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$. Al conjunto

$$\mathcal{V}_x = \{V \subseteq X : V \text{ es vecindad de } x\}$$

es llamado **el sistema de vecindades de x** .

Definición. Sea (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$. Se dice que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}_x$ es un **sistema fundamental de vecindades de x** si para todo U abierto que contiene a x , existe $V \in \mathcal{F}$ tal que $V \subseteq U$. A veces a $\mathcal{F}$ se le llama un **sistema básico de vecindades de x** .

Definición. Sea (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{B} \subseteq \tau$. Decimos que $\mathcal{B}$ es:

1. una **base** para la topología τ si

$$\tau = \left\{ \bigcup \mathcal{F} : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{B} \right\}$$

En este caso, a los elementos de $\mathcal{B}$ se les llama **básicos**.

2. una **subbase** para la topología τ , si la familia

$$\left\{ \bigcap \mathcal{F} : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{B} \text{ y } \mathcal{F} \text{ es finito} \right\}^1$$

¹La familia de uniones arbitrarias de intersecciones finitas de elementos de una familia de conjuntos dada, siempre determina una topología [3]

es una base para la topología τ .

En este caso, a los elementos de $\mathcal{B}$ se les llama **subbásicos**.

En ambos casos, se dice que $\mathcal{B}$ genera a la topología τ de X ;

Ejemplo: En $\mathbb{R}$, la familia

$$\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

es una base para la topología usual de $\mathbb{R}$, y la familia

$$\mathcal{S} = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\}$$

es una subbase para la topología usual de $\mathbb{R}$.

Definición. Un espacio topológico es **segundo numerable**, si existe una base del espacio con cardinalidad $\aleph_0$.

Proposición 1.1.1.1. Sean X un conjunto y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Si la familia $\mathcal{B}$ cumple las siguientes propiedades:

1. $\bigcup \mathcal{B} = X$, esto es que para cada $x \in X$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$.
2. Para cada $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Entonces existe una topología para X para la cual $\mathcal{B}$ es base.

Ejemplo: Para $\mathbb{R}$, la familia de intervalos semiabiertos:

$$\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

cumple con las condiciones de la **Proposición 1.1.1.1**, por lo que determina una topología que la denotaremos por τ_{sor} y es llamada **topología de Sorgenfrey, línea de Sorgenfrey o Topología del Límite Inferior**.

Aprovechamos la siguiente definición para introducir ciertos operadores asociados a subconjuntos de un espacio topológico y sus distintas notaciones que se usarán más adelante.

Definición. Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$.

1. La **cerradura** de A es:

$$\text{Cl}_X(A) = \text{Cl}_\tau A = \overline{A} = \bigcap \{C : C \text{ es cerrado de } X \text{ y } A \subseteq C\}$$

A los elementos de $\overline{A}$ se les llama **puntos de adherencia** de A .

2. El **interior** de A es:

$$\text{Int}_X(A) = \bigcup \{U : U \in \tau \text{ y } U \subseteq A\}$$

A los elementos de $\text{Int}_X A$ se les llama **puntos interiores** de A .

3. El **derivado o conjunto de puntos de acumulación** de A es:

$$A' := \{x \in X : \forall U \text{ abierto que contiene } x \text{ se tiene que } (U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset\}$$

A los elementos de A' también se les llama **puntos límite** de A y los puntos que de A no lo son se les llama **puntos aislados** de A .

4. La **frontera** de A es:

$$\partial A := \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$$

Proposición 1.1.1.2. Sea $A \subseteq X$. Entonces

$$\overline{A} = \{x \in X : \forall U \in \tau \text{ con } x \in U, U \cap A \neq \emptyset\}$$

y

$$\text{Int } A = \{x \in X : \exists U \in \tau \text{ tal que } x \in U \subseteq A\}.$$

Definición. Un subconjunto A de un espacio topológico X es **denso**, si $\overline{A} = X$.

Observación. A es denso si y sólo si para todo abierto U no vacío de X , se tiene $U \cap A \neq \emptyset$.

Ejemplo. En $\mathbb{R}$ con la topología usual, el conjunto de números racionales es un denso. Un ejemplo de un subconjunto no denso en $\mathbb{R}$ es cualquier conjunto finito.

Definición. Un espacio topológico X , es **separable** si existe un subconjunto denso y numerable de X .

Definición. Si (X, τ) es un espacio topológico y $Y \subseteq X$. La **topología de subespacio o topología relativa** a Y , es la familia:

$$\tau_Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}.$$

Teorema 1.1.1.1. Sea (X, τ) un espacio topológico, $Y \subseteq X$ con la topología de subespacio τ_Y y $A \subseteq Y$. Entonces:

1. Si $\mathcal{F}$ es una base (o subbase) de (X, τ) , entonces la familia

$$Y \cap \mathcal{F} := \{Y \cap F : F \in \mathcal{F}\}$$

es una base (o subbase) de (Y, τ_Y) .

2. A es cerrado en Y si y sólo si existe un cerrado C de X tal que $A = C \cap Y$.
3. $\text{Cl}_{\tau_Y} A = Y \cap \text{Cl}_{\tau} A$; $A'_{\tau_Y} = Y \cap A'_{\tau}$; $Y \cap \text{Int} A \subseteq \text{Int}_{\tau_Y} A$; $\text{Fr}_{\tau_Y} A \subseteq Y \cap \text{Fr}_{\tau} A$.

Definición. Sea X un espacio topológico.

1. Una **sucesión** en X , es una función $x : \mathbb{N} \rightarrow X$ denotada por $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ o simplemente $\{x_n\}$, donde para cada $n \in \mathbb{N}$, x_n denota el elemento $x(n)$.
2. Una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X se dice **convergente** a $l \in X$, si para todo abierto U que contiene a l , existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ que cumple que $n \geq N$, se tiene que $x_n \in U$.

1.1.2 Funciones continuas

Sean X y Y espacios topológicos.

Definición. Una función $f : X \rightarrow Y$ es **continua** si para todo abierto U de Y , $f^{-1}(U)$ es abierto de X .

Teorema 1.1.2.1. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función y $\mathcal{B}$ es una base (o subbase) de Y , entonces f es continua si y sólo si $f^{-1}(B) \in \tau$ para todo $B \in \mathcal{B}$.

Teorema 1.1.2.2. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. f es continua.
2. La preimagen de todo cerrado de Y , es cerrado en X .
3. Para cada $x \in X$ y cada vecindad W de $f(x)$ en Y , existe una vecindad V de x tal que $f(V) \subseteq W$.
4. $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ para todo $A \subseteq X$.

Definición. Una función $f : X \rightarrow Y$ es:

1. **homeomorfismo** si es biyectiva, continua y con inversa continua, en este caso, diremos que X y Y son homeomorfos y lo denotaremos como $X \underset{\text{Top}}{\cong} Y$;
2. **abierta (cerrada)** si para cada abierto (cerrado) B de X , $f(B)$ es abierto (cerrado) de Y .

En el presente trabajo para X un espacio topológico y p un punto

$$\text{Homeo}(X, p) : X \rightarrow X \times \{p\} \quad (\text{Homeo}(p, X) : X \times \{p\} \rightarrow X)$$

denota el homeomorfismo natural.

Teorema 1.1.2.3. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función biyectiva. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. f es homeomorfismo;
2. f es continua y abierta;
3. f es continua y cerrada;
4. $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ para cada $A \subseteq X$.

1.1.3 Topología producto

Definición. Se dice que un espacio topológico X es **homogéneo** si para cualesquiera $a, b \in X$ existe un homeomorfismo $f : X \rightarrow X$ tal que $f(a) = b$.

Definición. Dada una familia de espacios topológicos $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$, para el producto de esta familia

$$X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha = \left\{ x : I \rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \mid \forall \alpha \in I, x(\alpha) \in X_\alpha \right\}$$

se definen las funciones proyección $\pi_\beta : \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \rightarrow X_\beta$ para cada $\beta \in I$, determinadas de la siguiente manera $\pi_\beta(x) = x(\beta)$. La **topología producto** es la topología para X que tiene como subbase a la familia

$$\{\pi_\beta^{-1}(U) : \beta \in I \text{ y } U \text{ es abierto de } X_\beta\}.$$

Si X es un espacio topológico e I un conjunto, entonces al conjunto X^I se le dota de la topología producto, salvo que se indique lo contrario.

Teorema 1.1.3.1. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos. Entonces para cada $\beta \in I$, π_β es una función continua, abierta y suprayectiva.

Teorema 1.1.3.2. (Propiedad universal del producto topológico) Sean E un espacio topológico, $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos y $f : E \rightarrow \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ una función. Entonces la función f es continua si y sólo si para todo $\beta \in I$, la función $\pi_\beta \circ f$ es continua.

1.1.4 Axiomas de separación

Definición. Sea (X, τ) un espacio topológico.

1. X es **T₀**, si para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe un abierto U que contiene a x tal que $y \notin U$ ó si existe un abierto V que contiene a y tal que $x \notin V$.
2. X es **T₁**, si para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen abiertos U y V que contienen a x y y respectivamente, tales que $y \notin U$ y $x \notin V$.

3. X es **T_2 o de Hausdorff**, si para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen abiertos ajenos U y V tales que $x \in U$ y $y \in V$.
4. X es **T_3 o regular** si X es T_1 y para cada cerrado F de X y $x \notin F$, existen abiertos U y V ajenos tales que $F \subseteq U$ y $x \in V$.
5. X es **$T_{3\frac{1}{2}}$ o completamente regular o de Tychonoff**, si para cada cerrado C de X y $x \notin C$, existe una función continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(C) = \{0\}$ y $f(x) = 1$.
6. X es **T_4 o normal** si X es T_0 y para cada par de cerrados ajenos F y G de X , existen abiertos ajenos U y V tales que $F \subseteq U$ y $G \subseteq V$.

Proposición 1.1.4.1. Sean X y Y espacios topológicos, $f, g : X \rightarrow Y$ funciones continuas. Si Y es de Hausdorff, entonces el conjunto $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X .

1.1.5 Límites inversos

Definición. Un conjunto ordenado $(\Lambda, \ll)$ es **dirigido** si para cada $\alpha, \lambda \in \Lambda$, existe $\gamma \in \Lambda$ tal que $\alpha \ll \gamma$ y $\lambda \ll \gamma$.

Definición. Sean $(I, \ll)$ un conjunto dirigido y $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos. Supongamos que para $\alpha, \beta \in I$ tales que $\alpha \ll \beta$, existe una función continua $f_\alpha^\beta : X_\beta \rightarrow X_\alpha$, con las propiedades que $f_\alpha^\alpha = Id_{X_\alpha}$ y si $\alpha, \beta, \gamma \in I$ son tales que $\alpha \preceq \gamma \ll \beta$ entonces $f_\alpha^\beta = f_\alpha^\gamma \circ f_\gamma^\beta$. A la terna $(X_\alpha, f_\alpha^\beta, I)$ es llamado **sistema inverso**, a los espacios X_α se les llama **espacios factor** y a las funciones f_α^β se les llama **funciones de ligadura**.

Definición. Sea $(X_\alpha, f_\alpha^\beta, I)$ un sistema inverso. Definimos y denotamos al **límite inverso** del sistema inverso anterior, como

$$\varprojlim \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, I\} = \left\{ \mathbf{x} \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha : \forall \alpha, \gamma \in I \text{ tal que } \alpha \preceq \gamma, f_\alpha^\gamma(\mathbf{x}(\gamma)) = \mathbf{x}(\alpha) \right\}$$

En la práctica se escribirá solo $\varprojlim \{X_\alpha\}$, a menos que sea necesario especificar las funciones de ligadura.

Proposición 1.1.5.1. Sea $(X_\alpha, f_\alpha^\beta, I)$ un sistema inverso. Si cada X_α es de Hausdorff, entonces $\varprojlim \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, I\}$ es un subconjunto cerrado de $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$.

DEMOSTRACIÓN: Para cada $\alpha, \beta \in I$ tales que $\alpha \preceq \beta$, definimos el conjunto

$$K_\alpha^\beta = \{\mathbf{x} \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha : \pi_\alpha(\mathbf{x}) = (f_\alpha^\beta \circ \pi_\beta)(\mathbf{x})\}$$

Por la [Proposición 1.1.4.1](#), se tiene que K_α^β es un conjunto cerrado. Ahora, notemos que

$$\varprojlim \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, I\} = \bigcap \{K_\alpha^\beta : \alpha, \beta \in I, \alpha \preceq \beta\}$$

Así, $\varprojlim \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, I\}$ es un conjunto cerrado. ■

Definición. Sean $(X_\alpha, f_\alpha^\beta, I)$ y $(Y_\alpha, g_\alpha^\beta, I)$ sistemas inversos. Un **morfismo entre límites inversos** de $\varprojlim \{X_\alpha\}$ en $\varprojlim \{Y_\alpha\}$ es una familia de funciones continuas $\{u_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tales que para cualesquiera $\alpha, \beta \in I$ con $\alpha \preceq \beta$ se tiene $g_\alpha^\beta \circ u_\beta = u_\alpha \circ f_\alpha^\beta$; es decir, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} Y_\beta & \xrightarrow{g_\alpha^\beta} & Y_\alpha \\ u_\beta \uparrow & & \uparrow u_\alpha \\ X_\beta & \xrightarrow{f_\alpha^\beta} & X_\alpha \end{array}$$

Proposición 1.1.5.2. Sean $(X_\alpha, f_\alpha^\beta, I)$ y $(X'_\alpha, g_\alpha^\beta, I)$ sistemas inversos, $\mathbf{X} = \varprojlim \{X_\alpha\}$, $\mathbf{X}' = \varprojlim \{X'_\alpha\}$ y un morfismo $\{u_\alpha : X_\alpha \rightarrow X'_\alpha\}$ entre $\mathbf{X}$ y $\mathbf{X}'$. La función $u = \varprojlim u_\alpha : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$ dada por $u(\mathbf{x}) = \{u_\alpha(x(\alpha))\}_{\alpha \in I}$ es continua.

Proposición 1.1.5.3. Sean $(X_\alpha, f_\alpha^\beta, I)$ un sistema inverso, $\mathbf{X} = \varprojlim \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, I\}$ y para cada $\alpha \in I$, sea $f_\alpha : \mathbf{X} \rightarrow X_\alpha$ la proyección canónica. Entonces la familia

$$\mathcal{B} = \{f_\alpha^{-1}(U_\alpha) : \alpha \in I, U_\alpha \text{ es un abierto en } X_\alpha\}$$

es una base de la topología de $\mathbf{X}$.

DEMOSTRACIÓN: Sean $\mathbf{U}$ un abierto de $\mathbf{X}$ y $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$, entonces por definición, existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$ y para cada $i \in \mathcal{I}_n$, U_{α_i} es un abierto en X_{α_i} y satisfacen

que

$$\mathbf{x} \in \bigcap_{i=1}^n f_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}).$$

Sea $\alpha \in I$ tal que $\alpha_1, \dots, \alpha_n \preceq \alpha$, entonces para cada $i \in \mathcal{I}_n$, $(f_{\alpha_i}^\alpha)^{-1}(U_{\alpha_i})$ es un abierto en X_α . Ahora, consideremos $\mathbf{V} = \bigcap_{i=1}^n (f_{\alpha_i}^\alpha)^{-1}(U_{\alpha_i})$, claramente $\mathbf{x} \in f_\alpha^{-1}(\mathbf{V})$. Mostremos ahora que $f_\alpha^{-1}(\mathbf{V}) \subseteq \bigcap_{i=1}^n f_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$. Sean $\mathbf{b} \in \mathbf{V}$ e $i \in \mathcal{I}_n$, entonces

$$\mathbf{b}(\alpha_i) = f_{\alpha_i}(\mathbf{b}) = (f_{\alpha_i}^\alpha \circ f_\alpha)(\mathbf{b}) = f_{\alpha_i}^\alpha(\mathbf{b}(\alpha)) \in U_{\alpha_i}$$

esto último se sigue de que $\mathbf{b} \in \mathbf{V}$. ■

Proposición 1.1.5.4. Sean $(X_\alpha, f_\alpha^\beta, I)$ un sistema inverso, $\mathbf{X} = \varprojlim \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, I\}$, para cada $\alpha \in I$, sea $f_\alpha : \mathbf{X} \rightarrow X_\alpha$ la proyección canónica y $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X}$. Si $f_\alpha(\mathbf{Y}) = X_\alpha$ para cada $\alpha \in I$, entonces $\mathbf{Y}$ es denso en $\mathbf{X}$.

DEMOSTRACIÓN: Sean $\alpha \in I$ y U un abierto en X_α . Claramente $f_\alpha(\mathbf{Y}) \cap U \neq \emptyset$. Por lo que $f_\alpha^{-1}(U) \cap \mathbf{Y} \neq \emptyset$, ■

Proposición 1.1.5.5. Sean $\mathbf{X} = \varprojlim \{X_\alpha, f_\alpha^\beta, I\}$, $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{X}$ y para cada $\alpha \in I$, sea f_α la función canónica. Entonces

$$\overline{\mathbf{A}} = \bigcap_{\alpha \in I} f_\alpha^{-1}(\overline{f_\alpha(\mathbf{A})})$$

DEMOSTRACIÓN: Es claro que $\mathbf{A}$ es un subconjunto de la intersección y como la intersección es un conjunto cerrado, tenemos que $\overline{\mathbf{A}}$ también es un subconjunto de la intersección. Recíprocamente, sean $\mathbf{x} \in \bigcap_{\alpha \in I} f_\alpha^{-1}(\overline{f_\alpha(\mathbf{A})})$ y $\mathbf{U}$ un abierto que contiene a $\mathbf{x}$, por la [Proposición 1.1.5.3](#), existe $\alpha \in I$ y $U_\alpha \subseteq X_\alpha$ abierto tal que $\mathbf{x} \in f_\alpha^{-1}(U_\alpha) \subseteq \mathbf{U}$, luego por lo supuesto tenemos que $\mathbf{x}(\alpha) \in \overline{f_\alpha(\mathbf{A})}$. Así, como $\mathbf{x}(\alpha) \in U_\alpha$, se tiene que $U_\alpha \cap f_\alpha(\mathbf{A}) \neq \emptyset$, de aquí $f_\alpha^{-1}(U_\alpha) \cap \mathbf{A} \neq \emptyset$. Esto prueba que $\mathbf{x} \in \overline{\mathbf{A}}$. ■

1.1.6 Conexidad, compacidad y compacidad local

Definición. Un espacio topológico X es **conexo**, si no existen abiertos ajenos y no vacíos U y V tales que $X = U \cup V$. Un subconjunto $Y \subseteq X$ es **conexo** si Y es conexo como subespacio. Diremos que X es **disconexo** si no es conexo.

Teorema 1.1.6.1. Sea X un espacio topológico. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- i) X es conexo.
- ii) Los únicos conjuntos abiertos y cerrados de X son $\emptyset$ y X .
- iii) Si $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ es una función continua, entonces f no es suprayectiva.

Teorema 1.1.6.2. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función suprayectiva. Si f es continua y X es conexo, entonces Y es conexo.

Teorema 1.1.6.3. Sea X un espacio topológico. Si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia de subespacios conexos de X y $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ es conexo.

Teorema 1.1.6.4. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$ conexo. Si $B \subseteq X$ es tal que $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, entonces B es un conjunto conexo.

Definición. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. La **componente conexa** o simplemente **componente** de x es el conjunto:

$$C_x = \bigcup \{A \subseteq X : x \in A \text{ y } A \text{ es conexo}\}.$$

Teorema 1.1.6.5. Toda componente es un conjunto cerrado.

Definición. Un espacio topológico X es **totalmente desconexo** si cada componente está conformada por un punto.

Definición. Sea X un espacio topológico. Una familia $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una **cubierta** de X si $\bigcup \mathcal{C} = X$. Se dice que $\mathcal{C}$ es una **cubierta abierta** si esta es una cubierta y cada elemento de $\mathcal{C}$ es abierto en X . Una **subcubierta (abierta)** de $\mathcal{C}$ es una familia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{F}$ es una cubierta (abierta) de X .

Definición. Un espacio topológico X es **compacto** si toda cubierta tiene una subcubierta finita.

Definición. Un subconjunto de un espacio topológico es **compacto** si es compacto como subespacio.

Teorema 1.1.6.6. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función suprayectiva. Si f es continua y X es compacto, entonces Y es compacto.

Teorema 1.1.6.7. (Teorema de Tychonoff) Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos. Entonces, $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es compacto si y sólo si X_α es compacto para cada $\alpha \in I$.

Teorema 1.1.6.8. Sea X un espacio topológico de Hausdorff y compacto.

- a) Sean $x \in X$ y $\mathcal{F} = \{C \subseteq X : C \text{ es abierto y cerrado, } x \in C\}$, entonces el conjunto

$$A = \bigcap \mathcal{F}$$

es conexo.

- b) Si X es totalmente desconexo, entonces cada abierto es unión de conjuntos que son simultáneamente abiertos y cerrados.

DEMOSTRACIÓN: a) Supongamos que existen cerrados ajenos de A , U y V tales que $A = U \cup V$. Como A es cerrado en X , entonces U y V también son cerrados en X . Como ser espacio de Hausdorff y compacto implica ser normal, entonces existen abiertos ajenos de X , C y D tales que $U \subseteq C$ y $V \subseteq D$. Definamos a $B = X \setminus (C \cup D)$. Entonces la familia $\{B\} \cup \mathcal{F}$ está conformada de cerrados y la intersección de la familia es vacío. Así, como C es compacto, existen $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{F}$ tales que $B \cap C_1 \cdots \cap C_n = \emptyset$. De esta manera el conjunto $I = \bigcap_{i=1}^n C_i$ satisface que $I \subseteq C \cup D$, por lo que I es la unión disjunta de $I \cap C$ y $I \cap D$. Dado que I es abierto y cerrado en X , se sigue que $I \cap C$ e $I \cap D$ son abiertos y también cerrados en X pues $X \setminus (I \cap C) = X \setminus I \cup (I \cap D)$ y $X \setminus (I \cap D) = X \setminus I \cup (I \cap C)$. De este modo, si $x \in I \cap C$, entonces $A \subseteq I \cap C$. De lo anterior $V \subseteq C$ y también $V \subseteq D$. Por lo que $V \subseteq C \cap D = \emptyset$, así $V = \emptyset$. De manera similar, si $x \in I \cap D$, entonces $U = \emptyset$.

b) Sean U un abierto de X y $x \in U$. Por el inciso anterior se tiene que $\{x\} = \bigcap \mathcal{F}$, por lo que para cada $y \in X \setminus \{x\}$, existe $C_y \subseteq X$ abierto y cerrado de X tal que $y \notin C_y$. Como C es compacto, existen $y_1, \dots, y_n$ tales que

$$X = U \cup (X \setminus C_{y_1}) \cup \dots \cup (X \setminus C_{y_n})$$

De esta manera, $\bigcap_{i=1}^n C_{y_i} \subseteq U$, es un conjunto abierto y cerrado que contiene a x . ■

Definición. Un espacio de Hausdorff X es **localmente compacto** si para cada $x \in X$, existe un abierto U que contiene a x tal que $\overline{U}$ es compacto, en este caso, diremos que U es un abierto con cerradura compacta.

Teorema 1.1.6.9. Si X es un espacio Hausdorff. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. X es localmente compacto.
2. Para cada $x \in X$ y cada abierto U que contiene a x , hay un abierto V con cerradura compacta tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.
3. Para cada compacto $C \subseteq X$ y un abierto U tal que $C \subseteq U$, existe un abierto V con cerradura compacta tal que $C \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.
4. X tiene una base de abiertos con cerradura compacta.

Teorema 1.1.6.10. 1. Un subconjunto localmente compacto A de un espacio de Hausdorff Y es de la forma $V \cap F$, donde V es un abierto y F un cerrado en X .

2. Un subespacio de un espacio localmente compacto es localmente compacto si y sólo si tiene la forma $V \cap F$, donde V es un abierto y F es cerrado.

Teorema 1.1.6.11. Un subespacio cerrado de un espacio localmente compacto es localmente compacto.

1.1.7 Espacios métricos

Definición. Sea X un conjunto. Una función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ es una **métrica** para X , si satisface las siguientes condiciones:

- 1) $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$.
- 2) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$.
- 3) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
- 4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todo $x, y, z \in X$.

A la pareja (X, d) se les llama **espacio métrico**.

Dado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ y $x \in X$, definimos la **bola de radio ε con centro en x** como:

$$B(\varepsilon, x) = \{w \in X : d(w, x) < \varepsilon\}$$

Observación 1.1.7.1. Dado un espacio métrico (X, d) , la familia

$$\mathcal{B} = \{B(\varepsilon, x) : \varepsilon \in \mathbb{R}^+, x \in X\}$$

cumple con las condiciones de la **Proposición 1.1.1.1**, por lo que $\mathcal{B}$ determina una topología que denotaremos por τ_d y la llamaremos la **topología inducida por la métrica d** . Además notemos que

$$U \in \tau_d$$

$$\iff$$

$$\forall x \in U, \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } B(\delta, x) \subseteq U$$

$$\iff$$

$$\forall x \in U, \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que si } y \in X \text{ y } d(x, y) < \delta, \text{ entonces } y \in U.$$

En el presente trabajo, siempre que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, estaremos pensando que

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n).$$

Ejemplos:

- 1) Sea $n \in \mathbb{N}$, definimos la función $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Entonces se puede probar que d es una métrica para $\mathbb{R}^n$ y para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| := d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Además, resulta evidente por la **Observación 1.1.7.1** que la topología inducida por la métrica d es precisamente la topología usual de $\mathbb{R}^n$.

Definición. Sea (X, d) un espacio métrico.

1. Una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X es de **Cauchy** si para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \in \mathbb{N}$ satisfacen que $n, m \geq N$, entonces

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

2. X es **completo** si toda sucesión de Cauchy en X es convergente en X .

1.1.8 Redes, filtros y ultrafiltros

Definición. Sean X un espacio topológico y $(\Lambda, \ll)$ un conjunto dirigido. Una **red** en X es una función $\varphi : \Lambda \rightarrow X$, denotada por $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, donde $x_\lambda = \varphi(\lambda)$. Sea $x \in X$. Se dice que la red φ **converge** a x , y se escribe $\varphi \rightarrow x$ o $x_\lambda \rightarrow x$, si para cada abierto U que contiene a x , existe $\lambda \in \Lambda$ tal que para todo $\gamma \gg \lambda$, $\varphi(\gamma) \in U$.

Definición. Una **subred** de una red $\varphi : \Lambda \rightarrow X$ en un espacio X , es la composición $\varphi \circ \rho$, donde $\rho : M \rightarrow \Lambda$ es una función creciente y cofinal de un conjunto dirigido M en Λ , esto es

1. $\rho(\mu_1) \leq \rho(\mu_2)$ siempre que $\mu_1 \leq \mu_2$ (ρ es creciente),
2. para cada $\lambda \in \Lambda$, existe $\mu \in M$ tal que $\lambda \ll \rho(\mu)$ (ρ es cofinal en Λ).

Para $\mu \in M$, el punto $\varphi \circ \rho(\mu)$ es escrito como x_{λ_μ} .

Teorema 1.1.8.1. Si $E \subseteq X$. Entonces $x \in \overline{E}$ si y sólo si hay una red $\{x_\lambda\}$ en E tal que $x_\lambda \rightarrow x$.

Teorema 1.1.8.2. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función. Entonces la función f es continua si y sólo si siempre que $x_\lambda \rightarrow x$ en X , entonces $f(x_\lambda) \rightarrow f(x)$.

Definición. Un **filtro** $\mathcal{F}$ en un conjunto S es una familia de subconjuntos de S no vacíos con las siguientes propiedades:

1. si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$,
2. si $F \in \mathcal{F}$ y $F \subseteq F'$, entonces $F' \in \mathcal{F}$.

Una subcolección $\mathcal{F}_0$ de $\mathcal{F}$ es una **base de filtro** de $\mathcal{F}$ si cada elemento de $\mathcal{F}$ contiene algún elemento de $\mathcal{F}_0$, esto es, si y sólo si

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq S : \exists F_0 \in \mathcal{F}_0, F_0 \subseteq F\}$$

Note que una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos no vacíos de S es una base de filtro para algún filtro en S si y sólo si

1. Si $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, entonces existe $C_3 \in \mathcal{C}$ tal que $C_3 \subseteq C_1 \cap C_2$.
2. Si $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ son dos filtros en X , decimos que $\mathcal{F}_1$ es más fino que $\mathcal{F}_2$ si y sólo si $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$.

Definición. Un filtro $\mathcal{F}$ en un espacio X se dice que **converge** a x , escrito como $\mathcal{F} \rightarrow x$, si $\mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{F}$. Y decimos que $\mathcal{F}$ tiene a x como **punto límite** si y sólo si para cada $F \in \mathcal{F}$ intersecta a cada $V \in \mathcal{V}_x$.

Teorema 1.1.8.3. Si $E \subseteq X$, entonces $x \in \overline{E}$ si y sólo si existe un filtro $\mathcal{F}$ de X tal que $\mathcal{F} \rightarrow x$.

Definición. Si $\mathcal{F}$ es un filtro en X y $f : X \rightarrow Y$, entonces el $f(\mathcal{F})$ es el filtro de Y que tiene como base a los conjuntos $f(F)$, con $F \in \mathcal{F}$.

Teorema 1.1.8.4. Sea $f : X \rightarrow Y$. Entonces la función f es continua en x_0 si y sólo si siempre que $\mathcal{F} \rightarrow x_0$ en X entonces $f(\mathcal{F}) \rightarrow f(x_0)$ en Y .

Definición. Un filtro $\mathcal{F}$ es un **ultrafiltro** si y sólo si no hay ningún filtro $\mathcal{G}$ más fino estrictamente que $\mathcal{F}$.

Teorema 1.1.8.5. Sea X un espacio topológico. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. X es compacto.
2. Para cada familia $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de cerrados en X satisfaciendo que $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = \emptyset$, hay una subcolección finita $\{F_{\alpha_1}, \dots, F_{\alpha_n}\} \subseteq \{F_\alpha\}$ tal que $\bigcap_{i=1}^n F_{\alpha_i} = \emptyset$.
3. Todo base de filtro en X tiene un punto límite.
4. Todo ultrafiltro converge en X .

1.1.9 Espacio de funciones

Sean E y F dos espacios topológicos cualesquiera, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(E)$ y $\mathcal{B}$ una base de la topología de F . Entonces para $M \in \mathcal{S}$ y $V \in \mathcal{B}$ definimos

$$T(M, V) = \{f \in F^E : f(M) \subseteq V\}$$

Se puede probar que la familia

$$\mathcal{T} = \{T(M, V) : M \in \mathcal{S}, V \in \mathcal{B}\}$$

cumple con las condiciones de la [Proposición 1.1.1.1](#), por lo que $\mathcal{T}$ es una subbase para una topología en F^E que llamaremos $\mathcal{S}$ -topología. Hay casos particulares de esta topología que usaremos en el presente trabajo.

1. Si X es un espacio topológico, entonces X^X con la topología producto coincide con la $\mathcal{S}$ -topología, tomando a $\mathcal{S}$ como la familia de conjuntos singulares de X .
2. Si $\mathcal{S}$ es la familia de compactos de E , entonces la $\mathcal{S}$ -topología es llamada la **Topología compacto-abierta** en F^E .

1.1.10 Topología identificación

Definición. Sean Y un conjunto no vacío, X un espacio topológico y $p : X \rightarrow Y$ una función suprayectiva. La familia

$$\tau(p) := \{B \subseteq Y : p^{-1}(B) \text{ es abierto en } X\}$$

es una topología llamada **la Topología de identificación** en Y .

Puede notarse que bajo esta topología, la función p resulta ser continua.

Definición. Sean X y Y dos espacios topológicos. Una función continua y suprayectiva $p : X \rightarrow Y$ es una **función identificación (o simplemente identificación)** si la topología de Y coincide con $\tau(p)$.

Teorema 1.1.10.1. Sea $p : X \rightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. La función p es una identificación si y sólo para cada espacio Z y cada función $g : Y \rightarrow Z$, se tiene que: la continuidad de $g \circ p$, implica la continuidad de g .

Teorema 1.1.10.2. (Transgresión) Sea $p : X \rightarrow Y$ una identificación y $h : X \rightarrow Z$ una función continua. Asumiendo que h es constante en las fibras de p ; esto es, $h(p^{-1}(y))$ es un conjunto singular para cada $y \in Y$. Entonces la función $hp^{-1} : Y \rightarrow Z$ es continua; más aún, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & Y \\ h \downarrow & \searrow hp^{-1} & \\ Z & & \end{array}$$

Proposición 1.1.10.1. Sea $p : X \rightarrow Y$ una identificación con fibras conexas. Entonces un abierto (o cerrado) $F \subseteq Y$ es conexo si y sólo si $p^{-1}(F)$ es conexo.

1.1.11 Resultados adicionales

Definición. Un espacio topológico es **cero dimensional** si tiene una base de subconjuntos simultáneamente abiertos y cerrados.

Definición. Un espacio topológico es **Lindelöf** si toda cubierta abierta tiene una subcubierta numerable.

Definición. 1. Un subconjunto A de un espacio topológico es **no-denso** ó **denso en ningún lado** si $\text{Int}(\overline{A}) = \emptyset$.

2. Un espacio es de la **primera categoría** si es una unión numerable de subconjuntos no-densos

3. Un espacio es de la **segunda categoría (o de Baire)** si no es de la primera categoría.

4. Un subconjunto E de un espacio topológico X es **residual**, si $X \setminus E$ es de la primera categoría.

Teorema 1.1.11.1. Todo espacio regular y segundo numerable es normal.

Teorema 1.1.11.2. Todo espacio métrico completo y separable es de Baire.

Teorema 1.1.11.3. Ser separable y segundo numerable son propiedades equivalentes, en espacios métricos.

Teorema 1.1.11.4. Todo espacio de Hausdorff localmente compacto es de Baire.

Teorema 1.1.11.5. Todo espacio métrico compacto es separable y completo.

Teorema 1.1.11.6. Un espacio de Hausdorff y compacto es normal.

Lema 1.1.11.1. Todo espacio compacto, totalmente desconexo y de Hausdorff es cero dimensional.

DEMOSTRACIÓN: Sea U un abierto de X tal que $x \in U$. Hay que mostrar que existe W un abierto y cerrado de X tal que $x \in W \subseteq U$. Supongamos lo contrario, consideremos entonces a las familias $\mathcal{F} = \{W \subseteq X : W \text{ es abierto y cerrado, } x \in W\}$ y $\mathcal{G} = \{W \setminus U : W \in \mathcal{F}\}$. Notemos que $\mathcal{G}$ es una familia de cerrados de X con la propiedad de intersección finita. Como X es compacto, se sigue que $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$. Así,

$$\bigcap \mathcal{G} \subseteq \bigcap \mathcal{F} = \{x\}$$

esto último es por el [Teorema 1.1.6.8](#), por lo que $x \in \bigcap \mathcal{G}$, lo que implica que $x \notin U$, lo cuál es una contradicción a la elección de U . Por lo tanto, existe W abierto y cerrado de X tal que $x \in W \subseteq U$. ■

Teorema 1.1.11.7. (Teorema de Vedenissov) Todo espacio de Hausdorff, totalmente desconexo y localmente compacto es cero dimensional.

DEMOSTRACIÓN: Para mostrar que X es cero dimensional, basta con probar que para cada V abierto tal que $\bar{V}$ es compacto y $x \in V$, existe W un abierto y cerrado tal que $x \in W \subseteq V$. Sean V un abierto con cerradura compacta y $x \in V$, entonces como $\bar{V}$ es compacto y X es de Hausdorff y totalmente desconexo, entonces por el lema anterior tenemos que $\bar{V}$ es cero dimensional. Luego, como V es un abierto en $\bar{V}$, existe W abierto y cerrado en $\bar{V}$ tal que $x \in W \subseteq V$, de esto se tiene que W es abierto y cerrado en X . ■

Lema 1.1.11.2. Todo espacio T_3 y Lindelöf es normal.

DEMOSTRACIÓN: Sean C y D cerrados ajenos y no vacíos. Para cada $x \in C$, existen abiertos V_x y U_x ajenos tales que $x \in U_x$ y $D \subseteq V_x$. Así, $\{X \setminus C\} \cup \{U_x : x \in C\}$ forma una cubierta abierta de X y como X es Lindelöf, se deduce que existen $x_1, x_2, \dots \in C$ tales que $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_{x_i}$. Notemos que $U_x \subseteq X \setminus D$. De

manera análoga, se prueba que existen $y_1, \dots \in D$ y abiertos V_{y_i} tales que $y_i \in V_i$, $D \subseteq \bigcup_{i \geq 1} V_{y_i}$ y $V_{y_i} \subseteq X \setminus C$. Definimos

$$K_n = U_{x_n} \cap \left(\bigcap_{j=1}^n X \setminus \overline{V_{y_j}} \right) \quad \text{y} \quad W_n = V_{y_n} \cap \left(\bigcap_{j=1}^n X \setminus \overline{U_{x_j}} \right)$$

Como para cada $n \geq 1$, tenemos que $\overline{U_{x_n}} \subseteq X \setminus D$, entonces $D \subseteq X \setminus \overline{U_{x_i}}$, por lo que $D \subseteq \bigcap_{n \geq 1} X \setminus \overline{U_{x_i}}$ y de manera similar, tenemos que $C \subseteq \bigcap_{n \geq 1} X \setminus \overline{V_{y_i}}$. Así,

$$\mathbf{U} := \bigcup_{n \geq 1} K_n = \bigcup_{n \geq 1} \left(U_{x_n} \cap \bigcap_{i=1}^n (X \setminus \overline{V_{y_i}}) \right) \supseteq \bigcup_{n \geq 1} U_{x_n} \cap \bigcap_{n \geq 1} X \setminus \overline{V_{y_n}} \supseteq C.$$

De manera análoga tenemos que

$$\mathbf{V} := \bigcup_{n \geq 1} W_n \supseteq D$$

Es claro que $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ son abiertos, solo resta probar que son ajenos. Sin pérdida de generalidad tomemos $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n \geq m$, entonces

$$K_n \cap W_m = \left(U_{x_n} \cap \bigcap_{i=1}^n (X \setminus \overline{V_{y_i}}) \right) \cap \left(V_{y_m} \cap \bigcap_{i=1}^m (X \setminus \overline{U_{x_i}}) \right) \subseteq V_{y_m} \cap (X \setminus \overline{V_{y_m}}) = \emptyset.$$

Esto prueba que $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ son ajenos. ■

Lema 1.1.11.3. Todo espacio localmente compacto es completamente regular.

Proposición 1.1.11.1. Si X es localmente compacto y es la unión numerable de conjuntos compactos, entonces X es normal.

DEMOSTRACIÓN: Por el [Lema 1.1.11.2](#) y el [Lema 1.1.11.3](#), solo basta probar que X es Lindelöf. Sean $\mathcal{C} = \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ una cubierta abierta de X y $\{C_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de conjuntos compactos de X tales que $X = \bigcup C_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}$ es una cubierta abierta de C_n , por lo que existe una subcolección finita $\mathcal{C}_n \subseteq \mathcal{C}$ tal que $C_n \subseteq \bigcup \mathcal{C}_n$. Entonces $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_n \subseteq \mathcal{C}$ es una subcubierta numerable de X . ■

Proposición 1.1.11.2. Sea X un conjunto y $\{X_\alpha \subseteq X : \alpha \in I\}$ una familia ajena por pares donde cada X_α es un espacio normal. Definimos la siguiente topología en X : $U \subseteq X$ es un abierto en X si y sólo si $U \cap X_\alpha$ es abierto en X_α , entonces X es normal.

DEMOSTRACIÓN: Sean C y D dos cerrados ajenos no vacíos en X , entonces para cada $\alpha \in I$, $C \cap X_\alpha$ y $D \cap X_\alpha$ son cerrados en X_α , y como X_α es normal, existen U_α y V_α abiertos ajenos de X_α tales que $X_\alpha \cap C \subseteq U_\alpha$ y $X_\alpha \cap D \subseteq V_\alpha$. Así, es fácil ver que $U = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ y $V = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$ son abiertos en X ajenos, no vacíos tales que $C \subseteq U$ y $D \subseteq V$. ■

1.2 Teoría de Grupos

En esta sección se mostrarán generalidades de la teoría de grupos. Para esta sección se tomo como base [7].

1.2.1 Conceptos elementales

Definición. Sean G un conjunto y una función $\cdot : G \times G \rightarrow G$, la pareja $(G, \cdot)$ es un **grupo** si se cumplen las siguientes propiedades:

1. (**Asociatividad**) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ para cualesquiera $a, b, c \in G$.
2. (**Existencia de un neutro**) Existe $x \in G$, tal que $x \cdot g = g$ para todo $g \in G$. Al elemento x se le llama **neutro del grupo** G y se le denota como e_G .
3. (**Existencia de inversos**) Para cada $g \in G$, existe $h \in G$ tal que $g \cdot h = e_G$. En este caso, a h se le llama **inverso de** g en G y se le denota por g^{-1} .

A la función $\cdot$ se le llama **operación del grupo** G .

Observación 1.2.1.1. En algunas ocasiones, usaremos la notación aditiva $(+)$ para un grupo $(G, \cdot)$, es decir, haremos $+$ $:= \cdot$. A e_G lo denotaremos por 0 y para $g \in G$, su inverso en notación aditiva, es $-g$.

Definición. Sean $(G, \cdot)$ un grupo y $U, V \subseteq G$. Definimos los siguientes conjuntos:

$$UV = \cdot(U \times V) = \{u \cdot v : u \in U, v \in V\}$$

si $U = \{x\}$ ($V = \{x\}$), escribiremos xU y Vx en lugar de $\{x\}U$ y $V\{x\}$ respectivamente y

$$U^{-1} := \{u^{-1} : u \in U\}$$

En notación aditiva:

$$U + V := \{u + v : u \in U, v \in V\}$$

si $U = \{x\}$ ($V = \{x\}$), escribiremos $x + V$ y $U + x$ en lugar de $\{x\} + V$ y $U + \{x\}$ respectivamente y

$$-U := \{-u : u \in U\}$$

Proposición 1.2.1.1. Sean G un grupo, $\emptyset \neq A \subseteq G$ y $\{B_\alpha\}_\alpha$ una familia de subconjuntos de G . Entonces:

1.

$$\begin{aligned} A \left(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \right) &\subseteq \bigcap_{\alpha \in I} AB_\alpha. \\ \left(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \right) A &\subseteq \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha A. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} A \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \right) &= \bigcup_{\alpha \in I} AB_\alpha. \\ \left(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \right) A &= \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha A. \end{aligned}$$

3. Si $A = \{x\}$,

$$\begin{aligned} x \left(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \right) &= \bigcap_{\alpha \in I} xB_\alpha. \\ \left(\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha \right) x &= \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha x. \end{aligned}$$

Definición. Un subconjunto H de un grupo $(G, \cdot)$ es un **subgrupo** de G , si $(H, \cdot|_{H \times H})$ es un grupo. Se denota por $H \leq G$.

Proposición 1.2.1.2. Un subconjunto H de un grupo $(G, \cdot)$ es un subgrupo si y sólo si $e_G \in H$ y $h_1 \cdot h_2^{-1} \in H$ para todo $h_1, h_2 \in H$ o equivalentemente $H \neq \emptyset$ y $HH^{-1} \subseteq H$.

Proposición 1.2.1.3. Si G es un grupo y $\{H_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia de subgrupos de G , entonces $\bigcap_{\alpha \in I} H_\alpha \leq G$.

En adelante se omitirá mencionar la operación del grupo, con el entendido que estamos trabajando con grupos y su operación.

Definición. Sea G un grupo.

1) Sea $g \in G$, **centralizador** de g es el conjunto:

$$C_G(g) := \{h \in G : hg = gh\}$$

2) Sea $\emptyset \neq M \subseteq G$, el **centralizador** de M es el conjunto:

$$C_G(M) := \{h \in G : hm = mh, \forall m \in M\}$$

3) El **centro** de G es el conjunto:

$$Z(G) := \{g \in G : gh = hg, \forall h \in G\}$$

Proposición 1.2.1.4. Si G es un grupo y $\emptyset \neq M \subseteq G$, entonces $C_G(M) \leq G$.

Definición. Sean G un grupo y $S \subseteq G$. El **subgrupo generado** por S y denotado por $\langle S \rangle$ es el conjunto:

$$\bigcap \{H : H \leq G, S \subseteq H\}$$

En el caso de que $\langle S \rangle = G$, diremos que S **genera** a G .

Definición. Sea G un grupo, el **conmutador** de G denotado por $[G, G]$, es el subgrupo de G generado por el siguiente subconjunto de G :

$$\{g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} : g_1, g_2 \in G\}$$

Denotaremos a $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ por $[g_1, g_2]$.

Definición. Un grupo $(G, \cdot)$ es **abeliano** si $a \cdot b = b \cdot a$ para cada $a, b \in G$.

Definición. Sean G un grupo y $H \leq G$. H es un **subgrupo normal** si $aH = Ha$ para todo $a \in G$, el cual se denota por $H \trianglelefteq G$.

Proposición 1.2.1.5. Sea $H \leq G$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. $H \trianglelefteq G$.
2. $aHa^{-1} = H$, para todo $a \in G$.
3. $aHa^{-1} \subseteq H$, para todo $a \in G$.

Definición. Sea H un subgrupo de G . Se define la siguiente relación $\sim$ en G :

$$a, b \in G, a \sim b \iff ab^{-1} \in H$$

Usando que $H \leq G$, se prueba que $\sim$ es una relación de equivalencia. Sea $g \in G$, su clase de equivalencia es:

$$\begin{aligned} [g] &= \{a \in G : a \sim g\} \\ &= \{a \in G : ag^{-1} \in H\} \\ &= \{a \in G : ag^{-1} = h \text{ para algún } h \in H\} \\ &= \{a \in G : a = hg \text{ para algún } h \in H\} \\ &= \{hg : h \in H\} \\ &= Hg \end{aligned}$$

A estas clases de equivalencia se les llama **clases laterales derechas**.

De manera similar, se define la relación $\sim'$ en G :

$$a, b \in G, a \sim' b \iff ba^{-1} \in H$$

De nuevo, usando que $H \leq G$, se prueba que $\sim$ es una relación de equivalencia y que para $g \in G$, $[g] = gH$, a estas clases de equivalencia se les llama **clases laterales izquierdas**.

El conjunto de clases laterales se denota como $G/H := G/\sim = G/\sim'$.

Observación 1.2.1.2. Si $H \trianglelefteq G$, entonces las clases laterales izquierdas y derechas son iguales. Además, $gH = aH$ si y sólo si $ga^{-1} \in H$.

Definición. Sean G un grupo y $H \trianglelefteq G$. Para $a, b \in G$, se define

$$(aH) \cdot (bH) := (ab)H$$

Usando el hecho de que H es subgrupo normal, se puede probar que esta operación está bien definida y que con esta operación G/H es un grupo. A la cardinalidad del conjunto G/H se le llama **índice**.

Proposición 1.2.1.6. Si G es un grupo, entonces $[G, G] \trianglelefteq G$ y $G/[G, G]$ es abeliano.

Definición. Sea $\mathcal{G} = \{(G_\alpha, \otimes_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ un familia de grupos.

- a) El **producto directo** de la familia $\mathcal{G}$ es el producto $G = \prod_{\alpha \in I} G_\alpha$ con la operación $\otimes : G \times G \rightarrow G$ dada por

$$\otimes(\{x_\alpha\}, \{y_\alpha\}) = \{x_\alpha \otimes_\alpha y_\alpha\}$$

Se puede mostrar que la pareja $(G, \otimes)$ es un grupo.

- b) Si $\mathbf{x} \in \prod_{\alpha \in I} G_\alpha$, definimos el **soporte** de $\mathbf{x}$ como el conjunto

$$S_{\mathbf{x}} = \{\alpha \in I : \mathbf{x}(\alpha) \neq e_{G_\alpha}\}$$

Decimos que $\mathbf{x}$ tiene **soporte finito** si $S_{\mathbf{x}}$ es un conjunto finito.

- c) Denotamos y definimos la **suma directa o coproducto** de $\mathcal{G}$ como el conjunto

$$\bigoplus_{\alpha \in I} G_\alpha = \left\{ \mathbf{x} \in \prod_{\alpha \in I} G_\alpha : \mathbf{x} \text{ tiene soporte finito} \right\}$$

Note que la suma directa es un subgrupo del producto directo.

1.2.2 Homomorfismos

Definición. Sean G y H grupos. Una función $f : G \rightarrow H$ es un **homomorfismo** si para cada $g_1, g_2 \in G$, $f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2)$.

Proposición 1.2.2.1. Sea $f : G \rightarrow H$ un homomorfismo. Entonces

- i) $f(e_G) = e_H$.
- ii) Si $K \leq G$, entonces $f(K) \leq H$.
- iii) Si $L \leq H$, entonces $f^{-1}(L) \leq G$.

Definición. Sea $f : G \rightarrow H$ un homomorfismo.

- i) El **kernel** de f es el conjunto

$$\ker f := \{x \in G : f(x) = e_H\} = f^{-1}(e_H)$$

- ii) Se dice que f es un **monomorfismo** si f es inyectiva.
- iii) Se dice que f es un **epimorfismo** si f es suprayectiva.
- iv) Se dice que f es un **isomorfismo** si existe $u : H \rightarrow G$ un homomorfismo tal que $f \circ u = Id_H$ y $u \circ f = Id_G$. En tal caso se dice que G y H son isomorfos y se denota como $G \underset{\text{Iso}}{\cong} H$.

Teorema 1.2.2.1. Sea $f : G \rightarrow H$ un homomorfismo. Entonces las siguientes propiedades se satisfacen:

- a) $\ker f \trianglelefteq G$.
- b) f es un isomorfismo si y sólo si f es biyectiva.
- c) f es un monomorfismo si y sólo si $\ker f = \{e_G\}$.

Teorema 1.2.2.2. Sean $f : G \rightarrow H$ un homomorfismo y $N \trianglelefteq G$ tal que $N \leq \ker f$. Entonces existe un único homomorfismo $\hat{f} : G/N \rightarrow H$ tal que $f = \hat{f} \circ \pi$, donde $\pi : G \rightarrow G/N$ es la función canónica. Además, $\ker \hat{f} = \ker f/N$ y $\text{Im } \hat{f} = \text{Im } f$.

Corolario 1.2.2.1. Sea $f : G \rightarrow H$ un homomorfismo. Entonces $\text{Im } f \underset{\text{Iso}}{\cong} G/\ker f$.

1.2.3 G -conjuntos

Definición. Sean G y X un conjunto. Decimos que G **actúa** en X , si existe una función $\theta : G \times X \rightarrow X$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $\theta(e_G, x) = x$ para todo $x \in X$.
2. $\theta(g_1, \theta(g_2, x)) = \theta(g_1 g_2, x)$ para cada $g_1, g_2 \in G$ y cada $x \in X$.

La función θ es llamada la **acción** de G sobre X , al conjunto X se le llama G -conjunto. En la práctica, $\theta(g, x)$ se escribirá como $g.x$ o simplemente gx .

Definición. Sea X un G -conjunto.

- i) Sea $x \in X$, se define la **órbita** de x como el conjunto:

$$Gx := \{g.x : g \in G\}$$

- ii) Sea $x \in X$, se define el **estabilizador** de x como el conjunto:

$$G_x := \{g \in G : g.x = x\}$$

Sea X un G -conjunto con acción θ , se define la relación $\sim_\theta$ en X :

$$x, y \in X, x \sim_\theta y \iff \exists g \in G, g.x = y.$$

Proposición 1.2.3.1. La relación $\sim_\theta$ es de equivalencia.

Note que la clase de equivalencia de un elemento, resulta ser su órbita.

Al conjunto de clases de equivalencia $X / \sim_\theta$ lo denotaremos como X/G .

2. GRUPOS SEMI-TOPOLÓGICOS

En esta sección hablaremos un poco de grupos semi-topológicos, como introducción a los grupos topológicos. Los resultados encontrados en este capítulo están basados en [4].

2.1 El concepto de grupo semi-topológico

Definición. Un **grupo semi-topológico** es una terna $(G, \tau, \otimes)$ donde (G, τ) es un espacio topológico y $(G, \otimes)$ es un grupo tal que para cada $g \in G$, se tiene que las operaciones

$${}_g\otimes = \otimes|_{\{g\} \times G} \quad y \quad \otimes_g = \otimes|_{G \times \{g\}}$$

son ambas continuas.

En la práctica, se prescindirá de escribir a un grupo semi-topológico como terna, y solo se escribirá al conjunto en cuestión, a menos que sea necesario.

Observación 2.1.1. Si G es un grupo semi-topológico con G un grupo abeliano, entonces la continuidad de alguna de las funciones ${}_g\otimes$ o $\otimes_g$ implica la otra. Solo basta notar que $\{g\} \times G \underset{\text{Top}}{\cong} G \times \{g\}$ para cada $g \in G$.

Definición. Si G es un grupo semi-topológico y $g \in G$, entonces las funciones $l_g, r_g : G \longrightarrow G$ dadas por $l_g(x) = gx$ y $r_g(x) = xg$ las llamamos **traslación izquierda y derecha** por g respectivamente.

Dado que $\{g\} \times G \underset{\text{Top}}{\cong} G \times \{g\} \underset{\text{Top}}{\cong} G$, se puede probar que las funciones l_g y r_g son continuas; para ello basta con componer de manera adecuada los homeomorfismos anteriores con ${}_g\otimes$ y $\otimes_g$ respectivamente.

Proposición 2.1.1. a) La función $\otimes_g$ es continua si y sólo si para cada abierto W que contiene a yg , existe un abierto U que contiene a x tal que $Ux \subseteq W$.

b) La función $_g\otimes$ es continua si y sólo si para cada abierto W que contiene a gy , existe un abierto V que contiene a y tal que $yV \subseteq W$.

c) La función $\otimes$ es continua si y sólo si para cada $x, y \in G$ y cada abierto W que contiene a xy , existen abiertos U y V que contienen x y y respectivamente, tales que $UV \subseteq W$.

Teorema 2.1.1. Sea G un grupo semi-topológico y $a \in G$ un elemento fijo, las traslaciones r_a y l_a son homeomorfismos.

DEMOSTRACIÓN: Sabemos que todas las traslaciones son continuas. Ahora note que la función inversa de r_a es la función $r_{a^{-1}}$ y la inversa de l_a es $l_{a^{-1}}$. Por tanto ambas son continuas y por lo tanto r_a y l_a son homeomorfismos. ■

Corolario 2.1.1. Sean G un grupo semi-topológico y $a \in G$.

- (i) Si $F \subseteq G$ es cerrado, entonces Fa y aF son conjuntos cerrados.
- (ii) Si $H \subseteq G$ es compacto, entonces Ha y aH son conjuntos compactos.
- (iii) Si P es un abierto de G , entonces Pa y aP son conjuntos abiertos.
- (iv) Si $A \subseteq G$ y P es un abierto de G , entonces los conjuntos PA y AP son abiertos.

DEMOSTRACIÓN: Para probar (i) y (iii) aplique las respectivas traslaciones a los conjuntos $F \times \{a\}$, $\{a\} \times F$, $P \times \{a\}$ y $\{a\} \times P$ y dado que los homeomorfismos son funciones cerradas y abiertas, se sigue que Fa y aF son conjuntos cerrados y que Pa y aP son conjuntos abiertos. Luego, para (iv) observe que

$$AP = \bigcup_{a \in A} aP \quad PA = \bigcup_{a \in A} Pa$$

y la unión de conjuntos abiertos es abierto.

La prueba de (ii) se sigue de que la imagen continua de conjuntos compactos es compacta, esto por la [Teorema 1.1.6.6](#). ■

Observación 2.1.2. Del [Corolario 2.1.1](#), inciso (iii), se deduce que la operación del grupo es una función abierta, cuando G es un grupo semi-topológico.

Corolario 2.1.2. Sea G un grupo semi-topológico. Para cada $a, b \in G$, existe un homeomorfismo f de G tal que $f(a) = b$.

DEMOSTRACIÓN: Considere la función $f = r_{a^{-1}b}$. Por el [Teorema 2.1.1](#), f resulta ser un homeomorfismo tal que $f(a) = b$. ■

De lo anterior se sigue que todo grupo semi-topológico es homogéneo.

2.2 Sistema de vecindades del neutro de un grupo topológico

Si se tiene un sistema fundamental de vecindades del neutro de un grupo semi-topológico, se sigue del [Teorema 2.1.1](#) que se puede encontrar un sistema de vecindades de cualquier otro punto haciendo solo una traslación. En el siguiente resultado probamos que de hecho la topología de un grupo semi-topológico está completamente determinada por un sistema de vecindades de su neutro. Específicamente, se tiene lo siguiente:

Teorema 2.2.1. Si $\mathcal{F}$ es un sistema fundamental de vecindades abiertas de e en un grupo semi-topológico G , entonces cada una de las familias $\{xU : x \in G, U \in \mathcal{F}\}$ y $\{Ux : x \in G, U \in \mathcal{F}\}$ forma una base de la topología de G .

DEMOSTRACIÓN: Sea $g \in G$ y sea W un abierto que contiene a g . Entonces por el [Corolario 2.1.1](#), se tiene que $g^{-1}W$ es un abierto de e y por tanto existe $U \in \mathcal{F}$ tal que $U \subseteq g^{-1}W$, esto implica que $gU \subseteq W$. Lo que prueba que $\{xU : x \in G, U \in \mathcal{F}\}$ es una base para la topología de G . De manera similar se puede probar que $\{Ux : x \in G, U \in \mathcal{F}\}$ es una base de la topología de G . ■

Teorema 2.2.2. Si $\mathfrak{B}$ es una base de filtro tal que para cada $U \in \mathfrak{B}$, $e \in U$ y para cada $x \in U$, existen $V, W \in \mathfrak{B}$ tales que $xV \subseteq U$ y $Wx \subseteq U$. Entonces existe una topología τ en G que hace de G un grupo semi-topológico.

DEMOSTRACIÓN: Denotemos por $\widehat{\mathfrak{B}}$ a la familia de intersecciones finitas de elementos de $\mathfrak{B}$. Entonces $\widehat{\mathfrak{B}}$ es una familia no vacía, donde cada elemento contiene a e .

Sea $W = \bigcap_{j=1}^n U_j \in \widehat{\mathfrak{B}}$ y $x \in W$. Por hipótesis, existen $V_i \in \mathfrak{B}$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ tales que $xV_i \subseteq U_i$. Con esto,

$$\bigcap_{j=1}^n xV_j = x \left(\bigcap_{j=1}^n V_j \right) \subseteq \bigcap_{j=1}^n U_j = W$$

Esto prueba que la familia $\widehat{\mathfrak{B}}$ también cumple con las condiciones asumidas por la base de filtro $\mathfrak{B}$. Por definición de subbase, la familia de intersecciones finitas de la familia $\{xU : x \in G, U \in \mathfrak{B}\}$ forma una base de una topología τ de G . Ahora, si $y \in \bigcap_{i=1}^n x_i U_i$, entonces $x_i^{-1}y \in U_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, de esto se sigue por hipótesis que existen $V_i \in \mathfrak{B}$ tales que $x_i^{-1}yV_i \subseteq U_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$; esto es, $yV_i \subseteq x_i U_i$. Esto prueba que

$$y \left(\bigcap_{i=1}^n V_i \right) = \bigcap_{i=1}^n yV_i \subseteq \bigcap_{i=1}^n x_i U_i$$

Por lo tanto, para cada $y \in G$ la familia $\{yW : W \in \widehat{\mathfrak{B}}\}$ es una base local de y . Similarmente, se prueba que la familia $\{Wy : W \in \widehat{\mathfrak{B}}\}$ es una base local de y .

Resta probar que la topología τ hace de G un grupo semi-topológico. Probaremos que las traslaciones izquierdas son continuas y con argumentos similares se puede probar que las traslaciones derechas son continuas. Sean $g \in G$ fijo, $y \in G$ y $W \in \widehat{\mathfrak{B}}$. Entonces gyW es un abierto básico que contiene a gy . Ya que yW es un τ -abierto que contiene a y , entonces $l_g(yW) = g(yW) \subseteq gyW$. Esto prueba la continuidad de l_g . ■

2.3 Generación de grupos semi-topológicos

Muchos ejemplos interesantes con respecto a los axiomas de separación, a la conexidad, etc., requieren de continuidad de la operación del grupo al igual que la de la inversión. Por lo que se dejarán para el capítulo de grupos topológicos. Sin embargo, es posible trabajar con subgrupos, grupos cociente y productos a partir de grupos semi-topológicos conocidos.

La siguiente proposición es fácil de probar.

Proposición 2.3.1. Sean G un grupo semi-topológico y $H \leq G$.

- a) Si H tiene la topología de subespacio inducida por G , entonces H es un grupo semi-topológico.
- b) Si H es un subgrupo normal y a G/H lo dotamos con la topología cociente, entonces G/H es un grupo semi-topológico.

Proposición 2.3.2. Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de grupos semi-topológicos, entonces el producto directo $G = \prod_{\alpha \in I} G_\alpha$ con la topología producto es un grupo semi-topológico.

DEMOSTRACIÓN: Denotemos por $\otimes_G$ a la operación de grupo en G y para cada $\alpha \in I$, $\otimes_\alpha$ denota la operación de grupo en G_α . Sea $g \in G$, para probar que las funciones $(\otimes_G)_g$ y $g(\otimes_G)$ son continuas, es suficiente con mostrar que los diagramas de abajo son conmutativos pues como sabemos, para cada $\beta \in I$, las funciones π_β y $g_\beta(\otimes_\beta)$ son continuas y de la [Propiedad Universal del producto topológico \(Teorema 1.1.3.2\)](#) se sigue la continuidad de las funciones.

$$\begin{array}{ccc}
 \{g\} \times \prod_{\alpha \in I} G_\alpha & \xrightarrow{g(\otimes_G)} & \prod_{\alpha \in I} G_\alpha \\
 \downarrow \pi_\beta \times \pi_\beta & & \downarrow \pi_\beta \\
 \{g_\beta\} \times G_\beta & \xrightarrow{g_\beta(\otimes_\beta)} & G_\beta \\
 \\
 \prod_{\alpha \in I} G_\alpha \times \{g\} & \xrightarrow{(\otimes_G)_g} & \prod_{\alpha \in I} G_\alpha \\
 \downarrow \pi_\beta \times \pi_\beta & & \downarrow \pi_\beta \\
 G_\beta \times \{g_\beta\} & \xrightarrow{(\otimes_\beta)_{g_\beta}} & G_\beta
 \end{array}$$

Mostraremos la conmutatividad del primer diagrama, la conmutatividad del segundo diagrama se sigue de argumentos análogos. Sea $\mathbf{x} \in \prod_{\alpha \in I} G_\alpha$, entonces

por un lado tenemos:

$$\begin{aligned}\pi_\beta(g(\otimes_G)(g, \mathbf{x})) &= \pi_\beta(g \otimes_G \mathbf{x}) \\ &= (g \otimes_G \mathbf{x})(\beta) \\ &= g(\beta) \otimes_\beta \mathbf{x}(\beta).\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos:

$$\begin{aligned}g_\beta(\otimes_\beta)((\pi_\beta \times \pi_\beta)(g, \mathbf{x})) &= g_\beta(\otimes_\beta)(g(\beta), \mathbf{x}(\beta)) \\ &= g(\beta) \otimes_\beta \mathbf{x}(\beta).\end{aligned}$$

Con esto concluimos que el primer diagrama es conmutativo. Por tanto G es un grupo semi-topológico. ■

El siguiente resultado se sigue de el [Teorema 1.1.3.1](#) y el [Teorema 1.1.6.7](#).

Proposición 2.3.3. Si $\{G_\alpha : \alpha \in I\}$ es una familia de grupos semi-topológicos.

- i) Las proyecciones $\pi_\beta : \prod_{\alpha \in I} G_\alpha \longrightarrow G_\beta$ son homomorfismos continuos y abiertos.
- ii) G_α es compacto para cada $\alpha \in I$ si y sólo si $\prod_{\alpha \in I} G_\alpha$ es compacto.

2.4 Inmersión de un grupo en un producto directo

Definición. Decimos que un conjunto X esta inmerso en otro conjunto Y , si existe una función biyectiva de X sobre un subconjunto de Y .

Proposición 2.4.1. Cualquier grupo G puede ser inmerso en G^G .

DEMOSTRACIÓN: Definimos $\eta_r : G \longrightarrow G^G$, dada por $\eta_r(a) = r_a$. Donde este último es la traslación por la derecha de a . Es fácil ver que η_r es inyectiva y suprayectiva sobre su imagen. De igual forma la función $\eta_l : G \rightarrow G^G$, dada por $\eta_l(g) = l_g$ es una inmersión de G en G^G . ■

La [Proposición 2.4.1](#) significa que podemos identificar a G con el conjunto de sus traslaciones derechas; al igual que lo podemos identificar con sus traslaciones izquierdas.

Notación. Las funciones η_r y η_l serán llamadas **inmersiones canónicas derechas e izquierdas**, respectivamente.

Teorema 2.4.1. Sea G un grupo semi-topológico. Entonces

$$G \underset{\text{Top}}{\cong} \text{Im } \eta_r \underset{\text{Top}}{\cong} \text{Im } \eta_l.$$

DEMOSTRACIÓN: Por el [Teorema 1.1.2.3](#) basta probar que η_r es continua y abierta, pues ya sabemos que es biyectiva en su imagen. Sean $g \in G$ y $T(\{x\}, U)$ un elemento de la subbase de la topología producto tal que $r_a \in T(\{x\}, U)$, donde U es un abierto de G y $x \in G$. Note que $r_a \in T(\{x\}, U)$ si y sólo si $r_a(x) = xa \in U$; esto es, $a \in x^{-1}U$. Sabemos que $x^{-1}U$ es abierto en G . De lo anterior, se tiene que

$$\eta_r(x^{-1}U) = T(\{x\}, U) \cap \text{Im } \eta_r$$

y

$$\eta_r^{-1}(T(\{x\}, U)) = x^{-1}U.$$

Con las dos igualdades anteriores y el [Teorema 2.2.1](#), se sigue que η_r es un homeomorfismo. ■

Como sabemos las traslaciones l_a, r_a son continuas ([Teorema 2.1.1](#)). Denotemos por $C(G, G)$ al conjunto de funciones continuas de G en G . Entonces $\text{Im } \eta_r, \text{Im } \eta_l \subseteq C(G, G)$. De lo anterior se puede formular el siguiente resultado.

Teorema 2.4.2. Sea G un grupo semi-topológico. Entonces G es homeomorfo a un subconjunto de $C(G, G)$, donde este último se considera con la topología de subespacio inducida por la topología producto.

El teorema anterior es importante debido a que en la siguiente sección, se introduce otra topología en $C(G, G)$, y seguirá siendo de interés que G puede ser encajado (en el sentido anterior) en $C(G, G)$.

2.5 $\mathfrak{G}$ -topologías y grupos semi-topológicos

Sean E un conjunto no vacío y $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ dos topologías en el conjunto E . Supongamos que $\mathcal{V}_x$ denota un sistema fundamental de $\mathfrak{b}$ -vecindades de un punto arbitrario $x \in E$. Denotemos por $\mathfrak{a}(\mathfrak{b})$ la topología en E que tiene para

cada $x \in E$, el sistema de vecindades dada por la familia

$$\mathcal{G}_x = \{\text{Cl}_{\mathfrak{a}} V : V \in \mathcal{V}_x\}$$

Ya que para cada $\text{Cl}_{\mathfrak{a}} V \in \mathcal{G}_x$, se cumple $V \subseteq \text{Cl}_{\mathfrak{a}} V$, entonces la topología $\mathfrak{a}(\mathfrak{b})$ es más gruesa que $\mathfrak{b}$; esto es, que $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{b}$.

Además notemos que la topología $\mathfrak{a}(\mathfrak{b})$ es independiente de los sistemas fundamentales de $\mathfrak{b}$ -vecindades que se consideren, esto quiere decir que para cada $x \in X$, cualquier elección de los sistemas fundamentales $\mathcal{V}_x$, genera la misma topología que tiene como sistema de vecindades a la familia $\mathcal{G}_x$.

Proposición 2.5.1. Si $E_{\mathfrak{b}}$ es un espacio topológico regular y $\mathfrak{a}$ es otra topología en E tal que $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$, entonces $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b})$.

DEMOSTRACIÓN: Dado que $E_{\mathfrak{b}}$ es regular, existe $\mathcal{V}_x$ un sistema fundamental de $\mathfrak{b}$ -vecindades cerradas para cada $x \in E$. Tomemos $V \in \mathcal{V}_x$. Como $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$ se deduce que V es $\mathfrak{a}$ -cerrado, lo que implica que $\text{Cl}_{\mathfrak{a}} V = V$. Esto prueba la igualdad $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}$. ■

Definición. Sean $G_{\mathfrak{a}}$ un grupo semi-topológico y η_r la inmersión canónica de G en $C(G, G)$. Definimos una $\mathfrak{G}$ -topología en $C(G, G)$ de la siguiente forma. Primero definimos a la familia

$$\mathfrak{G} = \{M \subseteq G : M \text{ es cerrado en } G\}$$

y para cada $M \in \mathfrak{G}$ y $U \in \mathfrak{a}$, sea

$$T(M, U) = \{f \in C(G, G) : f(M) \subseteq U\}$$

Entonces la familia $\{T(M, U) : M \in \mathfrak{G}, U \in \mathfrak{a}\}$ forma una subbase para una topología en $C(G, G)$ que denotaremos por $\mathfrak{c}$.

A partir de este momento, $G_{\mathfrak{c}}$ denotará a la imagen de G bajo los homomorfismos η_l ó η_r con la topología de subespacio dada por $\mathfrak{c}$ en $C(G, G)$ definida arriba. Dado que el espacio topológico $G_{\mathfrak{c}}$ es homeomorfo al espacio G bajo η_r ó η_l , entonces G se puede considerar con la topología cuya subbase es la familia

$$\{\eta_r^{-1}(T(M, U)) : M \in \mathfrak{G}, U \in \mathfrak{a}\}$$

ó la familia

$$\{\eta_l^{-1}(T(M, U)) : M \in \mathfrak{G}, U \in \mathfrak{a}\}$$

Este espacio es el que usaremos en la práctica y abusando de la notación lo seguiremos denotando por $G_{\mathfrak{c}}$. Notemos que

$$\eta_r^{-1}(T(M, U)) = \bigcap_{m \in M} m^{-1}U \quad \text{y} \quad \eta_l^{-1}(T(M, U)) = \bigcap_{m \in M} Um^{-1}$$

Y de ahora en adelante, estos conjuntos los denotaremos como

$$T_G^r(M, U) \quad \text{y} \quad T_G^l(M, U)$$

respectivamente

Observación 2.5.1. $\odot$ Sabemos que si $G_{\mathfrak{a}}$ es un espacio T_1 , entonces cada conjunto unitario es cerrado y por tanto la topología de subespacio $\mathfrak{p}$ de $C(G, G)$ inducida por la topología producto de G^G es más gruesa que $\mathfrak{c}$; esto es, $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{c}$.

- $\odot$ Si identificamos a G con $\text{Im } \eta_r$, entonces se sigue que $\mathfrak{c}$ induce una topología más fina que $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$ en G . Esto es, $\mathfrak{a} = \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{c}$ en G .
- $\odot$ Si $\mathfrak{G}'$ denota la familia de cerrados con interior no vacío y si $\mathfrak{c}'$ denota la $\mathfrak{G}'$ -topología, entonces claramente $\mathfrak{c}' \subseteq \mathfrak{c}$. Para grupos semi-topológicos regulares, se puede probar que $\mathfrak{c}' \supseteq \mathfrak{p} = \mathfrak{a}$, y para grupos semi-topológicos normales $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}' \supseteq \mathfrak{p} = \mathfrak{a}$

Proposición 2.5.2. Si $G_{\mathfrak{a}}$ es un grupo semi-topológico, entonces $G_{\mathfrak{c}}$ también lo es.

DEMOSTRACIÓN: Consideremos la función $\otimes^{\mathfrak{c}} : G_{\mathfrak{c}} \times G_{\mathfrak{c}} \longrightarrow G_{\mathfrak{c}}$, dada por $\otimes^{\mathfrak{c}}(x, y) = xy$. Para y fijo, probaremos la continuidad de $\otimes_y^{\mathfrak{c}}$. Sea $T_G^r(M, U)$ un subbásico de la topología $\mathfrak{c}$ tal que $xy \in T_G^r(M, U)$. Como

$$xy \in T_G^r(M, U) = \bigcap_{m \in M} m^{-1}U,$$

$$\text{entonces } x \in \left(\bigcap_{m \in M} m^{-1}U \right) y^{-1} = \bigcap_{m \in M} (m^{-1}(Uy^{-1}))$$

notemos que Uy^{-1} es $\mathfrak{a}$ -abierto, pues $G_{\mathfrak{a}}$ es un grupo semi-topológico y U es $\mathfrak{a}$ -abierto. Ahora, veamos que $\otimes_y^{\mathfrak{c}}(T_G^r(M, Uy^{-1}) \times \{y\}) \subseteq T_G^r(M, U)$. Si $z \in T_G^r(M, Uy^{-1})$, entonces $\otimes_y^{\mathfrak{c}}(z, y) = zy \in T_G^r(M, Uy^{-1})y$, y dado que

$$\begin{aligned} T_G^r(M, Uy^{-1})y &= \left(\bigcap_{m \in M} m^{-1}Uy^{-1} \right) y \\ &= \bigcap_{m \in M} (m^{-1}Uy^{-1}y) \\ &= \bigcap_{m \in M} m^{-1}U \\ &= T_G^r(M, U) \end{aligned}$$

Esto prueba la continuidad de $\otimes_y^{\mathfrak{c}}$. De forma análoga, usando η_l , se prueba la continuidad de ${}_y\otimes^{\mathfrak{c}}$. ■

Proposición 2.5.3. Sea $G_{\mathfrak{a}}$ un grupo semi-topológico. Si $G_{\mathfrak{a}}$ es espacio topológico normal, entonces $\mathfrak{a}(\mathfrak{c}) = \mathfrak{c}$.

DEMOSTRACIÓN: Por la [Observación 2.5.1](#), tenemos que $\mathfrak{c} \supseteq \mathfrak{p} = \mathfrak{a}$ en G , y por tanto

$$\mathfrak{c} \supseteq \mathfrak{a}(\mathfrak{c}) = \mathfrak{p}(\mathfrak{c})$$

Para probar la otra contención, sea $x \in G$ y P una $\mathfrak{c}$ -vecindad de x . Entonces existen $M_1, \dots, M_n$ cerrados en G y $U_1, \dots, U_n$ abiertos en G , tales que

$$x \in \bigcap_{i=1}^n T_G^r(M_i, U_i) \subseteq P$$

De aquí, se tiene que

$$M_i x \subseteq U_i \text{ para cada } i, 1 \leq i \leq n$$

Dado que $G_{\mathfrak{a}}$ es grupo semi-topológico normal y $M_i x$ es cerrado, pues M_i lo es, se tiene que existen $\mathfrak{a}$ -abiertos V_i para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ tales que

$$M_i x \subseteq V_i \subseteq \text{Cl}_{\mathfrak{a}} V_i \subseteq U_i.$$

Lo que prueba que

$$x \in T_G^r(M_i, V_i) \subseteq T_G^r(M_i, \text{Cl}_{\mathfrak{a}} V_i) \subseteq T_G^r(M_i, U_i)$$

para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. De esto tenemos que

$$x \in \bigcap_{i=1}^n T_G^r(M_i, V_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^n T_G^r(M_i, \text{Cl}_{\mathfrak{a}} V_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^n T_G^r(M_i, U_i) \subseteq P$$

Ya que $\text{Cl}_{\mathfrak{a}} V_i$ es $\mathfrak{a}$ -cerrado, entonces $T_G^r(M_i, \text{Cl}_{\mathfrak{a}} V_i)$ es $\mathfrak{p}$ -cerrado en G^G y por tanto también lo es $\bigcap_{i=1}^n T_G^r(M_i, \text{Cl}_{\mathfrak{a}} V_i)$. Por lo que

$$x \in \text{Cl}_{\mathfrak{p}} \bigcap_{i=1}^n T_G^r(M_i, V_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^n T_G^r(M_i, \text{Cl}_{\mathfrak{a}} V_i) \subseteq P$$

Debido a que $\bigcap_{i=1}^n T_G^r(M_i, V_i)$ es un elemento de la base de la topología $\mathfrak{c}$, y de que, $\text{Cl}_{\mathfrak{p}} \bigcap_{i=1}^n T_G^r(M_i, V_i)$ es una $\mathfrak{p}(\mathfrak{c})$ -vecindad de x , se sigue que $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{p}(\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}(\mathfrak{c})$, pues $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$ en G . Por lo tanto $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{c})$ en G . ■

Observación 2.5.2. En vista de la [Proposición 2.5.1](#), y la [Proposición 2.5.3](#) se tiene que

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{c}' = \mathfrak{a}(\mathfrak{c}) = \mathfrak{p}(\mathfrak{c})$$

para grupos semi-topológicos normales.

Proposición 2.5.4. Sea $G_{\mathfrak{a}}$ un grupo semi-topológico regular. Entonces las funciones

- i) $f : G_{\mathfrak{a}} \times G_{\mathfrak{c}} \rightarrow G_{\mathfrak{a}}$, dada por $f(x, y) = xy$.
- ii) $g : G_{\mathfrak{c}} \rightarrow G_{\mathfrak{c}}$, dada por $g(x) = x^{-1}$.

son continuas.

DEMOSTRACIÓN: Para i), sea U un $\mathfrak{a}$ -abierto que contiene a xy . Ya que para y fijo, $f(x, y) = r_y(x) = xy$ y r_y es continua, existe un $\mathfrak{a}$ -cerrado M (debido a la regularidad de $G_{\mathfrak{a}}$) que contiene a x tal que $r_y(M) = My \subseteq U$, lo cual

implica que $y \in T_G^r(M, U)$. Por lo tanto, para $z \in T_G^r(M, U)$ sabemos que se tiene que $r_z(M) = Mz \subseteq U$, así

$$f(M \times T_G^r(M, U)) = M \cap T_G^r(M, U) \subseteq U.$$

Esto prueba la continuidad de f .

Para ii), note que $x \in T_G^r(M, U)$ si y sólo si $x^{-1} \in T_G^r(G \setminus U, G \setminus M)$. En efecto ya que r_x es biyectiva se tiene que $r_x(M) = Mx \subseteq U$ es equivalente a $r_x(G \setminus M) = G \setminus r_x(M) \supseteq G \setminus U$ y esto finalmente es equivalente a que

$$(G \setminus U)x^{-1} = r_x^{-1}(G \setminus U) \subseteq G \setminus M.$$

Así, se tiene

$$g^{-1}(T_G^r(M, U)) = T_G^r(G \setminus U, G \setminus M)$$

Dado que $T_G^r(M, U)$ y $T_G^r(G \setminus U, G \setminus M)$ son subbásicos de la topología $\mathfrak{c}$, se tiene la continuidad de la función g . ■

3. GRUPOS TOPOLÓGICOS

En este capítulo discutiremos los resultados generales sobre los grupos topológicos, subgrupos, axiomas de separación, grupos cociente, producto directo y conexidad. El contenido de este capítulo está basado en [4], [2], [1] y [5].

3.1 El concepto de grupo topológico

Definición. Un **grupo topológico** es una terna $(G, \tau, \otimes)$ donde (G, τ) es un espacio topológico y $(G, \otimes)$ es un grupo tal que $\otimes : G \times G \rightarrow G$ es continua y la inversión es continua, esto es que la función $\text{In}_G : G \rightarrow G$ dada por $\text{In}_G(x) = x^{-1}$, donde x^{-1} denota el inverso de x en el grupo G . A esta función la denotamos In si está claro cuál es la operación del grupo.

La continuidad de la función inversión se puede reformular de la siguiente forma

Proposición 3.1.1. La función In_G es continua si y sólo si para cada $x \in G$ y cada abierto W que contiene a x^{-1} , existe un abierto U que contiene a x tal que $U^{-1} \subseteq W$.

Proposición 3.1.2. Todo grupo topológico es grupo semi-topológico.

DEMOSTRACIÓN: Dado que la función $\otimes$ es continua, entonces las funciones $\otimes|_{\{g\} \times G} = {}_g\otimes$ y $\otimes|_{G \times \{g\}} = \otimes_g$ son continuas. ■

Veamos que el recíproco de la **Proposición 3.1.2** no siempre es cierto.

Considere $(G = \mathbb{R}, \tau, +)$ donde τ es la topología de Sorgenfrey y $+$ es la suma usual de $\mathbb{R}$. Veremos que G es un grupo semi-topológico, probaremos que la operación $+$ es continua, lo que implica que ${}_g\otimes$ y $\otimes_g$ son continuas. Para

ello usaremos el **Teorema 1.1.2.1**. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y un básico $[x + y, x + y + \varepsilon)$ conteniendo a $x + y$. Es fácil ver que

$$(x, y) \in \left[x, x + \frac{\varepsilon}{2}\right) \times \left[y, y + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

y

$$+ \left(\left[x, x + \frac{\varepsilon}{2}\right) \times \left[y, y + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \subseteq [x + y, x + y + \varepsilon)$$

Afirmamos que la función inversión no es continua en 0. Para ello probaremos que $\text{In}^{-1}([0, 1))$ no es un abierto en G . Primero notemos que los subconjuntos de la forma $(a, b]$ no son abiertos en G , pues no existen abiertos de G que contengan a b y que estén contenidos en $(a, b]$. De esta manera, como $(-1, 0] = \text{In}^{-1}([0, 1))$, se concluye que In no es continua. Por lo tanto, $(G, \tau, +)$ no es un grupo topológico.

Observación 3.1.1. Note además que el contraejemplo de la proposición anterior también prueba que aún cuando la operación del grupo es continua eso no implica la continuidad de la inversión. Más adelante veremos que una condición para que esto suceda es que el espacio sea de Hausdorff y localmente compacto (Véase el **Teorema 3.2.2.1**).

La siguiente proposición es una equivalencia útil que muestra cuando G es un grupo topológico.

Proposición 3.1.3. $(G, \tau, \otimes)$ es un grupo topológico si y sólo si la función

$$\otimes_- : G \times G \rightarrow G$$

dada por $\otimes_-(x, y) = x \otimes y^{-1}$ es continua.

DEMOSTRACIÓN: $\implies$) Supongamos que G es un grupo topológico. El siguiente diagrama indica que la función $\otimes_-$ es la composición de funciones continuas, de donde se concluye que $\otimes_-$ es continua

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{(Id_G, \text{In}_G)} & G \times G \xrightarrow{\otimes_G} G \\ & \searrow & \nearrow \\ & \otimes_G \circ (Id_G, \text{In}_G) = \otimes_- & \end{array}$$

$\Leftarrow$) Supongamos que la función $\otimes_-$ es continua. Primero notemos que la inversión es una función continua, pues el siguiente diagrama indica que es la composición de algunas funciones continuas:

$$\begin{array}{ccccc}
 G & \xrightarrow{(e_G, Id_G)} & \{e_G\} \times G & \xrightarrow{\otimes_-|_{\{e_G\} \times G}} & G \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & \otimes_-|_{\{e_G\} \times G} \circ (e_G, Id_G) = In_G & &
 \end{array}$$

Como la inversión es continua, entonces el siguiente diagrama indica que la función $\otimes_G$ es la composición de funciones continuas

$$\begin{array}{ccccc}
 G \times G & \xrightarrow{(Id_G, In_G)} & G \times G & \xrightarrow{\otimes_-} & G \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & \otimes_- \circ (Id_G, In_G) = \otimes_G & &
 \end{array}$$

Con esto, tenemos que las funciones In_G y $\otimes_G$ son continuas. Por tanto, G es un grupo topológico. $\blacksquare$

En el presente trabajo, estaremos usando de forma recurrente la función $\otimes_-$ definida arriba, sin volver a definirla para evitar redundancias.

Teorema 3.1.1. Sea G un grupo topológico. Las funciones traslación derecha e izquierda r_a, l_a , la función inversión In y los automorfismos $l_a \circ r_{a^{-1}}$, denotado por c_a , para cada $a \in G$, son todos homeomorfismos.

DEMOSTRACIÓN: El [Teorema 2.1.1](#) nos dice que r_a y l_a son homeomorfismos. Luego para la inversión, basta con notar que es su propia inversa y por definición es continua, así la inversión es un homeomorfismo. Los automorfismos c_a son homeomorfismos, pues son composición de homeomorfismos. $\blacksquare$

Proposición 3.1.4. Sea $(G, \otimes)$ un grupo dotado con una topología τ . Entonces $(G, \otimes, \tau)$ es un grupo topológico si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

- i) Para cada $g \in G$, la función $r_g (l_g)$ es continua.
- ii) La función inversión en G es continua.

iii) La operación $\otimes$ es continua en (e_G, e_G) .

DEMOSTRACIÓN: La necesidad es inmediata. Mostraremos la suficiencia. Primero notemos que para cada g , $l_g = \text{In}_G \circ r_{g^{-1}} \circ \text{In}_G$, por lo que cada l_g es continua y además cada traslación es un homeomorfismo. Ahora, mostraremos la continuidad de $\otimes$ en cada punto. Sean $(x, y) \in G \times G$ y un U abierto en G tal que $xy \in U$, ya que cada traslación es un homeomorfismo, se sigue que $x^{-1}Uy^{-1}$ es un abierto de G que contienen a e_G , así por iii), existen abiertos V_1 y V_2 que contienen a e_G tales que $V_1V_2 \subseteq x^{-1}Uy^{-1}$, así $(xV_1)(V_2y) \subseteq U$ y como xV_1 y V_2y son abiertos de G que contienen a x e y respectivamente, se sigue que $\otimes$ es continua en (x, y) . ■

Proposición 3.1.5. Sea $(G, \otimes)$ un grupo dotado con una topología τ . Entonces $(G, \otimes, \tau)$ es un grupo topológico si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

- i) Para cada $g \in G$, las funciones r_g y l_g son continuas.
- ii) La función inversión en G es continua en e_G .
- iii) La operación $\otimes$ es continua en (e_G, e_G) .

DEMOSTRACIÓN: Primero mostremos que la función inversión es continua en cada punto. Sean $x \in G$ y U un abierto de G que contiene a x^{-1} , por i), xU es un abierto de G que contiene a e_G , así por ii), existe V un abierto de e_G tal que $V^{-1} \subseteq xU$, así $(Vx)^{-1} = x^{-1}V^{-1} \subseteq U$ y como Vx es un abierto que contiene a x por i), se sigue que la función inversión es continua en x . La continuidad de $\otimes$ se sigue de la proposición anterior. ■

Corolario 3.1.1. Sea $(G, \otimes)$ un grupo dotado con una topología τ tal que hace continua a la operación de grupo $\otimes$. $(G, \otimes, \tau)$ es un grupo topológico si y sólo si la función inversión In_G es continua en e_G .

El siguiente corolario se prueba de forma similar al [Corolario 2.1.1](#)

Corolario 3.1.2. Sea G un grupo topológico.

- (i) Si $F \subseteq G$ es cerrado (abierto), entonces F^{-1} es un conjunto cerrado (abierto).
- (ii) Si $H_1, H_2 \subseteq G$ son conjuntos compactos, entonces H_1H_2 y H_1^{-1} son conjuntos compactos.

Por el [Corolario 2.1.2](#) y la [Proposición 3.1.2](#), tenemos que todo grupo topológico es homogéneo.

Esto último es una de las principales propiedades de los grupos topológicos.

Teorema 3.1.2. Sean G un grupo topológico, $A \subseteq G$ un cerrado (compacto) de G y B un compacto (cerrado) de G , entonces AB es un cerrado de G .

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ una red en AB que converge a $x_0 \in G$. Para cada $\alpha \in D$, $x_\alpha = y_\alpha z_\alpha$ para algunos $y_\alpha \in A$ y $z_\alpha \in B$. Como B es compacto, existe un $z_0 \in B$ y una subred $\{z_\beta\}_{\beta \in E}$ de $\{z_\alpha\}_{\alpha \in D}$ tal que esta converge a z_0 . Claramente la red $\{x_\beta\}_{\beta \in E}$ converge a x_0 . Es fácil ver que $\{(x_\beta, z_\beta)\}_{\beta \in E}$ es una red en $G \times G$ que converge a (x_0, z_0) . Por lo tanto, la red $\{y_\beta = x_\beta z_\beta^{-1}\}_{\beta \in E}$ converge a $x_0 z_0^{-1}$, pues es la composición de la red $\{(x_\beta, y_\beta)\}_{\beta \in E}$ con la función continua $\otimes_-$. Así, ya que A es cerrado y $y_\beta \in A$ para cada $\beta \in E$, se tiene que $x_0 z_0^{-1} \in A$. Por lo que

$$x_0 = (x_0 z_0^{-1}) z_0 \in AB.$$

De forma similar se prueba que AB es cerrado, si A es compacto y B es cerrado. ■

Observación. Si G es un grupo topológico y se tienen dos conjuntos A y B cerrados, entonces no necesariamente el conjunto AB es cerrado. Para esta afirmación considere el siguiente ejemplo, $(\mathbb{R}, +)$ con la topología y la suma usual en $\mathbb{R}$, consideremos los subconjuntos cerrados $\mathbb{Z}$ y $\alpha\mathbb{Z}$ donde α es un número irracional. Probaremos que el conjunto

$$\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z} = \{m + \alpha n : m, n \in \mathbb{Z}\}$$

es denso pero no cerrado.

DEMOSTRACIÓN: Utilizando la [Proposición 4.1.1](#), cuya demostración se presenta más adelante y el hecho de que un espacio homogéneo es discreto si y sólo si algún punto es aislado, basta con probar que el 0 no es un punto aislado. Definamos la siguiente sucesión $a_n = n\alpha - [n\alpha]$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Primero notemos que a_n es una sucesión formada por elementos distintos, esto debido a que el 1 y α son racionalmente independientes (esto, considerando a $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$ -espacio vectorial) y como es claro que $a_n \in [0, 1]$, se tiene entonces que $\{a_n\}$ contiene una subsucesión convergente, pues el conjunto $[0, 1]$ es compacto.

Nótese además, que está misma sucesión es de Cauchy, de manera si tomamos $\varepsilon > 0$, existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$0 < |(\lfloor n_1 \alpha \rfloor - \lfloor n_2 \alpha \rfloor) + (n_1 - n_2)\alpha| = |a_{n_1} - a_{n_2}| < \varepsilon$$

Esto significa, que para cada $\varepsilon > 0$, existen $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $m + \alpha n \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$ (a saber, tomando $m = \lfloor n_1 \alpha \rfloor - \lfloor n_2 \alpha \rfloor$ y $n = n_1 - n_2$). Lo que prueba que 0 no es un punto aislado.

Ahora, veamos que $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ no es cerrado. Por la densidad del conjunto, bastará con encontrar un número que no pertenezca al conjunto. Veamos que $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$. Si ocurriera lo contrario, existirían $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $m + n\alpha = \frac{1}{2}$, así

$$\left(m - \frac{1}{2}\right) \cdot 1 + n\alpha = 0$$

implica que $m = \frac{1}{2}$, pues 1 y α son $\mathbb{Q}$ -linealmente independientes, lo que contradice que $m \in \mathbb{Z}$ ■

Proposición 3.1.6. Sean $(G, \otimes)$ un grupo topológico, X_1 y X_2 espacios topológicos.

Si $f_i : X_i \rightarrow G$ con $i \in \{1, 2\}$ son funciones continuas. Entonces la función $(f_1 \otimes f_2) : X_1 \times X_2 \rightarrow G$ dada por $(f_1 \otimes f_2)(x_1, x_2) = f_1(x_1) \otimes f_2(x_2)$ es continua

DEMOSTRACIÓN: Notemos que la continuidad de las funciones f_1 y f_2 implica la continuidad de la función $(f_1 \times f_2) : X_1 \times X_2 \rightarrow G \times G$ dada de forma natural. Ahora, notemos que $(f_1 \otimes f_2) = \otimes \circ (f_1 \times f_2)$. ■

Proposición 3.1.7. Sea (G, τ) un grupo topológico finito. La topología τ puede ser obtenida tomando como vecindades del neutro de G a los conjuntos que contengan un subgrupo normal H de G .

DEMOSTRACIÓN: Primero probaremos que el conjunto $H = \bigcap \{U : U \in \tau, e \in U\}$ es un subgrupo normal de G . Notemos que $H \neq \emptyset$, pues $e \in H$. Veamos que H es cerrado bajo la operación del grupo G . Sean $x, y \in H$ y $U \in \tau$ con $e \in U$, como $x^{-1}U$ es un abierto que contiene a e y $y \in H$, entonces $y \in x^{-1}U$, por lo que $xy \in U$. Como U fue arbitrario, entonces $xy \in H$.

Ahora, probemos que H es cerrado bajo inversos. Sea $x \in H$ y $U \in \tau$ con $e \in U$, como U^{-1} es un abierto que contiene a e , entonces $x \in U^{-1}$ y así $x^{-1} \in U$. Como U fue arbitrario, entonces $x^{-1} \in H$.

Ahora probemos que H es normal. Sea $g \in G$, hay que probar que $gHg^{-1} \subseteq H$. Sean $h \in H$ y $U \in \tau$ con $e \in U$, como $g^{-1}Ug$ es un abierto que contiene a e y $h \in H$, entonces $h \in g^{-1}Ug$. Así, $ghg^{-1} \in U$. Como U fue arbitrario, se tiene que $ghg^{-1} \in H$.

Ahora, consideremos el siguiente filtro en G , $\mathcal{F}_e = \{A \subseteq G : H \subseteq A\}$. Definimos a τ_H como la topología en G como sigue:

$$U \in \tau_H \iff \forall x \in U, \exists A \in \mathcal{F}_e \text{ tal que } xA \subseteq U.$$

Probaremos que $\tau = \tau_H$. Sean $U \in \tau$ y $x \in U$, notemos que $x^{-1}U$ es un abierto que contiene a e y así $H \subseteq x^{-1}U$, por lo que $xH \subseteq U$. Lo que prueba que $U \in \tau_H$. Recíprocamente, sea $V \in \tau_H$, como G es finito, entonces τ es finito, así H es abierto pues es la intersección finita de abiertos. Por definición de τ_H , se tiene que $V = \bigcup_{x \in V} xH$ y así $V \in \tau$, pues cada $xH \in \tau$. ■

Ahora veremos algunos de los ejemplos clásicos de grupos topológicos.

Ejemplos.

1. $(\mathbb{R}, +, \tau)$, donde $+$ es la suma usual y τ es la topología usual de $\mathbb{R}$. Este es un grupo topológico, pues si se tienen $x, y \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, entonces es fácil ver que

$$+ \left[\left(x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2} \right) \times \left(-y - \frac{\varepsilon}{2}, -y + \frac{\varepsilon}{2} \right) \right] \subseteq (x - y - \varepsilon, x - y + \varepsilon).$$

Lo que prueba que $(\mathbb{R}, +, \tau)$ es un grupo topológico ([Proposición 3.1.3](#)). Este es un ejemplo de grupo topológico abeliano, métrico, completo, localmente compacto, no compacto y segundo numerable.

2. $(\mathbb{R}^n, +, \tau)$, donde $+$ es la suma usual de vectores en $\mathbb{R}^n$ y τ es la topología usual en $\mathbb{R}^n$. Igualmente, este es un ejemplo de un grupo topológicos métrico, no compacto, localmente compacto y segundo numerable.
3. $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot, \tau)$ donde $\cdot$ es el producto usual en $\mathbb{R}$ y τ es la topología de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ como subespacio de $\mathbb{R}$ inducida por la topología usual de los reales. Se puede mostrar que este es un grupo topológico abeliano.
4. $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, es un grupo topológico con la topología inducida por $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y el producto usual de $\mathbb{R}$ como operación de grupo. Este de

hecho es un subgrupo de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

5. $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, es un grupo topológico con la topología inducida de $\mathbb{C}$ y el producto en $\mathbb{C}$ como operación de grupo.
6. Sea $(G, \otimes)$ un grupo con la topología indiscreta. Mostraremos que G es un grupo topológico. Sean $g, h \in G$ y U un abierto en G tal que $gh \in U$, como G tiene la topología indiscreta solo puede suceder que $U = G$, como $\otimes_-(G \times G) = GG^{-1} \subseteq G$ pues G es grupo, entonces por la [Proposición 3.1.3](#), se tiene que el grupo G con la topología indiscreta es un grupo topológico. Un espacio indiscreto con más de un punto no es ni siquiera T_0 , por tanto existe un grupo topológico que no es T_0 y por tanto no es de Hausdorff.
7. Cualquier grupo con la topología discreta es grupo topológico.

En particular, $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo topológico con la topología inducida por $\mathbb{R}$ y la suma usual, es un espacio discreto, métrico, numerable, localmente compacto y segundo numerable. Note que $\mathbb{Z}$ es un subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$.

Por otro lado, $(\mathbb{R}, +, \tau)$ donde $+$ es la suma usual y τ es la topología discreta, es un ejemplo de un grupo topológico discreto, métrico, no numerable, localmente compacto, no compacto y no segundo numerable.

8. Sean X un espacio topológico y $(F, \otimes_F)$ un grupo topológico. Sea

$$C(X, F) = \{f : X \longrightarrow F : f \text{ es una función continua}\}.$$

Para cada $f, g \in C(X, F)$, definimos $f \otimes_F g$ que sea la función dada por $(f \otimes_F g)(x) = f(x) \otimes_F g(x)$. Entonces $C(X, F)$ es un grupo. Y si lo dotamos con la topología de subespacio inducido por la topología producto en F^X , entonces $C(X, F)$ es un grupo topológico.

3.2 Condiciones para que un grupo semi-topológico sea grupo topológico

En esta sección estaremos usando la topología $\mathfrak{c}$ definida en la [Sección 2.5](#)

Teorema 3.2.1. Sea $G_{\mathfrak{a}}$ un grupo semi-topológico regular. Si $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}$ en G , entonces G es grupo topológico.

DEMOSTRACIÓN: Si $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$ en G , entonces la [Proposición 2.5.4](#) indica precisamente que $G_{\mathfrak{a}}$ es un grupo topológico. ■

3.2.1 Grupos semi-topológicos de tipo-C y tipo-B

Definición. a) Un grupo semi-topológico $G_{\mathfrak{a}}$ se dice que es de **tipo-B**, si para la topología $\mathfrak{c}$ en G inducida por $C(G, G)$ se tiene que, siempre que

$$\mathfrak{c} \supseteq \mathfrak{a} \text{ y } \mathfrak{a}(\mathfrak{c}) = \mathfrak{c}, \text{ entonces } \mathfrak{c} = \mathfrak{a}.$$

b) Un grupo semi-topológico $G_{\mathfrak{a}}$ se dice que es de **tipo-C**, si para cada grupo semi-topológico $E_{\mathfrak{w}}$ y cada monomorfismo $f : E_{\mathfrak{w}} \longrightarrow G_{\mathfrak{a}}$, existe un subconjunto residual $H \subseteq E$ tal que la restricción $f|_H : H_{\mathfrak{w}} \longrightarrow G_{\mathfrak{c}}$ es continua.

Teorema 3.2.1.1. Todo grupo semi-topológico normal $G_{\mathfrak{a}}$ de tipo-B es un grupo topológico.

DEMOSTRACIÓN: Por el [Teorema 3.2.1](#), basta con probar que $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$ en G . La [Proposición 2.5.3](#) implica que $\mathfrak{a}(\mathfrak{c}) = \mathfrak{c}$. Dado que $\mathfrak{c} \supseteq \mathfrak{a}$ siempre se cumple, y como G es de tipo-B, se tiene que $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$. ■

Teorema 3.2.1.2. Todo grupo semi-topológico $G_{\mathfrak{a}}$ normal y de Baire de tipo-C es un grupo topológico.

DEMOSTRACIÓN: En vista del [Teorema 3.2.1.1](#), será suficiente mostrar que $G_{\mathfrak{a}}$ es de tipo-B. Por la [Proposición 2.5.2](#), $G_{\mathfrak{c}}$ es un grupo semi-topológico. Ahora, consideremos la función identidad $i : G_{\mathfrak{a}} \rightarrow G_{\mathfrak{a}}$, la cual es continua. Ya que $G_{\mathfrak{a}}$ es de tipo-C, existe un subconjunto residual $H \subseteq G$ tal que la restricción $i|_H : H_{\mathfrak{a}} \longrightarrow G_{\mathfrak{c}}$ es continua. Sabemos que $\mathfrak{c} \supseteq \mathfrak{a}$ en G . Ya que $G_{\mathfrak{a}}$ es normal, se tiene que $\mathfrak{a}(\mathfrak{c}) = \mathfrak{c}$, por la [Proposición 2.5.3](#). Más aún, como $G_{\mathfrak{a}}$ es un espacio de Baire, H es un conjunto denso en $G_{\mathfrak{a}}$. Dado que la función inclusión $i : H_{\mathfrak{a}} \rightarrow G_{\mathfrak{c}}$ es continua, se sigue que en H , la topología inducida por $\mathfrak{a}$ es más fina que la inducida por la topología $\mathfrak{c}$. Y dado que $\mathfrak{c} \supseteq \mathfrak{a}$ en G , se tiene que $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$ en H .

Ahora, para probar que $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$ en G , sea $x \in G$. Sea $\text{Cl}_{\mathfrak{a}} V$ un elemento de la topología $\mathfrak{a}(\mathfrak{c})$ que contiene a x , donde V es un elemento de un sistema fundamental de $\mathfrak{c}$ -vecindades de x . Entonces $\text{Cl}_{\mathfrak{a}}(V) \cap H$ es $\mathfrak{c}$ -abierto y por tanto $\mathfrak{a}$ -abierto en H . Como H es denso en $G_{\mathfrak{a}}$ obtenemos que

$$\text{Cl}_{\mathfrak{a}}(\text{Cl}_{\mathfrak{a}}(V) \cap H) \subseteq \text{Cl}_{\mathfrak{a}}(\text{Cl}_{\mathfrak{a}}(V)) \cap \text{Cl}_{\mathfrak{a}}(H) = \text{Cl}_{\mathfrak{a}}(\text{Cl}_{\mathfrak{a}}(V)) \cap G = \text{Cl}_{\mathfrak{a}}(V)$$

el cual es una $\mathfrak{a}$ -vecindad de x en G . Lo que prueba que $\mathfrak{a}(\mathfrak{c}) \subseteq \mathfrak{a}$, y como $\mathfrak{c} \supseteq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}(\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}$, entonces $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$ pues $\mathfrak{a}(\mathfrak{c}) = \mathfrak{c}$. ■

Lema 3.2.1.1. (M. K. Fort) Sean $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{b}$ dos topologías en un conjunto F tales que:

- a) $\mathfrak{a}$ tiene una base numerable $\mathcal{B} = \{U_n; n \in \mathbb{N}\}$
- b) Para cada $n \geq 1$, existe un subconjunto K_n en F tal que $U_n \subseteq K_n$, y para cada conjunto $\mathfrak{a}$ -abierto U con $x \in U$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_n \subseteq K_n \subseteq U$.
- c) Si $x \in U_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, existe un conjunto $\mathfrak{b}$ -abierto V tal que $x \in V$ y $V \setminus K_n$ es $\mathfrak{b}$ -abierto.

Entonces para todo espacio topológico $E_{\mathfrak{w}}$ y toda función continua $f : E_{\mathfrak{w}} \rightarrow F_{\mathfrak{b}}$, existe un subconjunto residual H de E tal que la restricción $f|_H : H_{\mathfrak{w}} \rightarrow F_{\mathfrak{a}}$ es continua.

DEMOSTRACIÓN: Sea $f : E_{\mathfrak{w}} \rightarrow F_{\mathfrak{b}}$ una función continua. Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$D_n = \{x \in E : \forall V \in \mathcal{V}_x, \exists y, z \in V \text{ tal que } f(y) \in U_n \text{ y } f(z) \notin K_n\}$$

Mostraremos primero que los puntos en donde la función $f : E_{\mathfrak{w}} \rightarrow F_{\mathfrak{a}}$ es discontinua están en $\bigcup_{i=1}^{\infty} D_n$. Sea $x \in E$ tal que f no es continua en x . Entonces para alguna vecindad U de $f(x)$, no hay ninguna vecindad W de x tal que $f(W) \subseteq U$. Como $f(x) \in U$, por (b) se tiene que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) \in U_n \subseteq K_n \subseteq U$. Se sigue que para cada vecindad de x contiene puntos y e z tales que $f(y) \in U_n$ y $f(z) \notin K_n$. En otras palabras, $x \in D_n$.

Note que D_n es un subconjunto cerrado de E para cada $n \in \mathbb{N}$, pues si $x \in \overline{D_n}$, entonces toda vecindad de x contiene elementos de D_n , y por tanto,

cada vecindad de x contiene puntos y y z tales que $f(y) \in U_n$ y $f(z) \notin K_n$. Es decir que $x \in D_n$.

Ahora probaremos que D_n es un subconjunto no-denso de E para cada $n \in \mathbb{N}$. Asumamos que D_n es no no-denso para algún $n \in \mathbb{N}$. Entonces como D_n es cerrado y $\text{Int}(\overline{D_n}) \neq \emptyset$, se tiene que existe un abierto no vacío P tal que $P \subseteq D_n$. Por definición de D_n , se tiene que existe $y \in P$ tal que $f(y) \in U_n$. Por c), existe un $\mathfrak{b}$ -abierto V tal que $f(y) \in V$ y $K \setminus K_n$ es $\mathfrak{b}$ -abierto. Dado que $f : E_{\mathfrak{w}} \rightarrow F_{\mathfrak{b}}$ es continua, se tiene que existe un abierto W tal que $y \in W \subseteq P$ y $f(W) \subseteq V$. De esta manera, de la definición de D_n , existe $z \in W$ tal que $f(z) \notin K_n$ y por tanto $f(z) \in V \setminus K_n$, pues $f(z) \in V$. De nuevo, por la continuidad de $f : E_{\mathfrak{w}} \rightarrow F_{\mathfrak{b}}$, existe un abierto W_1 tal que $z \in W_1 \subseteq W$ y $f(W_1) \subseteq V \setminus K_n$, ya que este último es una vecindad $\mathfrak{b}$ -abierto de $f(z)$. Por otra parte, por definición de D_n , existe $t \in W_1$ tal que $f(t) \in U_n$, lo cual es una contradicción pues $f(W_1) \subseteq V \setminus K_n$ y $U_n \subseteq K_n$.

Por lo tanto, D_n es un subconjunto no-denso de E para cada $n \in \mathbb{N}$. De esto se sigue que $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ es de primera categoría y contiene a todos los puntos de α -discontinuidad de f . En otras palabras, en cada punto de $H = E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$, f es α -continua. Y claramente H es un conjunto residual. ■

Teorema 3.2.1.3. Si $G_{\mathfrak{a}}$ es un grupo semi-topológico regular y segundo numerable, entonces es de tipo-C.

DEMOSTRACIÓN: Observe que todo espacio regular segundo numerable es normal. Sea $\mathcal{A} = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base numerable para $G_{\mathfrak{a}}$. Por tanto, la colección $\mathfrak{G}'$ de todos los subconjuntos cerrados M de G tales que M es el complemento de algún V_n ó M tiene interior no vacío, es una familia numerable de conjuntos. De esta manera, la topología $\mathfrak{c}'$ en $C(G_{\mathfrak{a}}, G_{\mathfrak{a}})$ que tiene los siguientes conjuntos:

$$U_n = \bigcap_{i=1}^n T^r(M_i, V_i)$$

como base, tiene una base numerable $\mathcal{B} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$. Note que la familia $\mathcal{B}$ satisface la condición a) del [Lema 3.2.1.1](#). Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos el conjunto $K_n = \bigcap_{i=1}^n T(M_i, \overline{V_i})$. Claramente $U_n \subseteq K_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Más

aun, $\mathfrak{p}(\mathfrak{c}') = \mathfrak{a}(\mathfrak{c}') = \mathfrak{c}'$ en G (Véase la [Proposición 2.5.3](#) y la [Observación 2.5.2](#)) pues $G_{\mathfrak{a}}$ es normal. De esto se sigue que la condición b) del [Lema 3.2.1.1](#) se satisface, y como cada K_n es $\mathfrak{p}$ -cerrado, la condición c) se cumple. Por tanto, por el [Lema 3.2.1.1](#), para cada espacio topológico $E_{\mathfrak{w}}$ y cada función continua $f : E_{\mathfrak{w}} \longrightarrow G_{\mathfrak{a}}$, existe un subconjunto residual H de $E_{\mathfrak{w}}$ tal que la restricción $f|_H : H_{\mathfrak{w}} \longrightarrow G_{\mathfrak{c}'}$ es continua. Ahora tomando $E_{\mathfrak{w}} = G_{\mathfrak{u}}$ y f como la función identidad, se tiene que la restricción de la función identidad $i|_H : H_{\mathfrak{a}} \longrightarrow G_{\mathfrak{c}'}$ es continua. Así de la [Proposición 2.5.1](#) y la [Observación 2.5.1](#) se sigue que $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}'$ en G . Por tanto, $i|_H : H_{\mathfrak{a}} \longrightarrow G_{\mathfrak{c}}$ es continua. Esto prueba que $G_{\mathfrak{a}}$ es de tipo-C. ■

Corolario 3.2.1.1. (Wu.) Todo grupo semi-topológico regular segundo numerable y de Baire es de tipo-B y por tanto grupo topológico.

DEMOSTRACIÓN: Se sigue de combinar los Teoremas [3.2.1.2](#) y [3.2.1.3](#), debido a que todo espacio regular y segundo numerable es normal. ■

Corolario 3.2.1.2. (Montgomery) Un grupo semi-topológico que es espacio métrico completo y separable es un grupo topológico.

DEMOSTRACIÓN: Es inmediato del [Teorema 3.2.1.3](#), pues todo espacio métrico completo y separable es de Baire y de que todo espacio métrico separable es segundo numerable. ■

Corolario 3.2.1.3. Un grupo semi-topológico regular localmente compacto y segundo numerable es grupo topológico

DEMOSTRACIÓN: Se sigue del [Teorema 3.2.1.3](#), y de que todo espacio Hausdorff localmente compacto de Baire. ■

El siguiente resultado es un caso particular del [Corolario 3.2.1.2](#), debido a que todo espacio métrico compacto es separable y completo.

Corolario 3.2.1.4. Un grupo semi-topológico métrico y compacto es grupo topológico.

Por último el siguiente corolario es un caso particular del [Corolario 3.2.1.3](#)

Corolario 3.2.1.5. Un grupo semi-topológico Hausdorff compacto y segundo numerable es grupo topológico.

3.2.2 Grupos semi-topológicos localmente compactos

En esta sección probaremos que un grupo semi-topológico Hausdorff localmente compacto es un grupo topológico si la operación del grupo es continua. Note que la condición de numerabilidad del [Corolario 3.2.1.5](#) a sido remplazada por otra.

En esta sección asumiremos que $G_{\mathfrak{a}}$ es un grupo semi-topológico de Hausdorff localmente compacto donde la operación del grupo es continua.

Lema 3.2.2.1. Sea A un subconjunto compacto de $G_{\mathfrak{a}}$. Entonces A^{-1} es cerrado.

DEMOSTRACIÓN: Sea $x \in \overline{A^{-1}}$ y $\{x_{\alpha}\}_{\alpha \in N}$ una red en A^{-1} tal que $x_{\alpha} \rightarrow x$. Ya que $x_{\alpha} \in A^{-1}$, $x_{\alpha}^{-1} \in A$. Dado que A es compacto, existe una subred $\{x_{\alpha_{\beta}}^{-1}\}$ que converge a $y \in A$. Pero la continuidad de la operación de grupo implica que $y = x^{-1}$, y por tanto $x \in A^{-1}$. ■

Lema 3.2.2.2. Si x es un punto de acumulación de un subconjunto numerable E de $(G, \mathfrak{a}, \otimes)$, entonces x^{-1} es un punto de acumulación de E^{-1} .

DEMOSTRACIÓN: Sea x un punto de acumulación de E . Supongamos que $E = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$. Entonces hay un ultrafiltro $\mathcal{F}$ en E que converge a x . Basta con probar que el ultrafiltro $\mathcal{F}^{-1}$ converge a y , pues por la continuidad de la operación del grupo se tendría que $y = x^{-1}$.

Consideremos $F = E \cup \{x\}$ y $D = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} F^n$. Nótese que D es un subgrupo numerable de G . Sea $A = \overline{D}$. Por la continuidad de $\otimes$ (Véase el [Teorema 1.1.2.2](#)), $A^2 \subseteq A$. En efecto,

$$A^2 = A A = \otimes(A \times A) = \otimes(\overline{D} \times \overline{D}) = \otimes(\overline{D \times D}) \subseteq \overline{\otimes(D \times D)} = \overline{D^2} \subseteq \overline{D} = A$$

Ahora sea C una vecindad compacta del neutro. Entonces $A \subseteq DC^{-1}$, pues $\overline{D} = A$. Por lo tanto

$$A = \bigcup_{d \in D} (dC^{-1} \cap A) = \bigcup_{d \in D} d(C^{-1} \cap A)$$

pues D es un grupo y $A^2 \subseteq A$. Como $\overline{D} = A$, es localmente compacto pues es un cerrado en un espacio localmente compacto. Por lo tanto, para cada $d \in D$, el conjunto $d(C^{-1} \cap A)$ es cerrado por el [Lema 3.2.2.1](#). Ahora bien, como D es numerable, entonces es un espacio de Baire pues A es localmente compacto. Así, existe un elemento d_0 tal que $d_0(C^{-1} \cap A)$ tiene interior no vacío. Por tanto, existe un abierto $P \subseteq G$ tal que $P \cap A \neq \emptyset$ y $P \cap A \subseteq d_0(C^{-1} \cap A)$. Ya que $\overline{D} = A$, existe $c \in D \cap P$. Por lo que $xc^{-1}(P \cap A) = xc^{-1}P \cap A$ es una vecindad de x relativa a a , y dado que $\mathcal{F} \rightarrow x$ es un ultrafiltro en A que converge a x , existe $K \in \mathcal{F}$ tal que $K \subseteq xc^{-1}(P \cap A) \subseteq xc^{-1}d_0C^{-1}$. Lo que implica que $K^{-1} \subseteq Cd_0^{-1}cx^{-1}$. Como el conjunto $Cd_0^{-1}cx^{-1}$ es compacto por ser C compacto. Se tiene que $\mathcal{F}^{-1}$ converge a y . ■

Ahora podemos mejorar el [Lema 3.2.2.1](#):

Lema 3.2.2.3. Si A es un subconjunto compacto de G_a , entonces A^{-1} también lo es.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que A^{-1} no es compacto. Consideremos V una vecindad compacta de e , por el [Lema 3.2.2.1](#) tenemos que A^{-1} es cerrado. Usando el hecho de que un conjunto cerrado en un compacto es compacto y el que la unión finita de conjuntos compactos es compacto, se puede construir una sucesión $\{x_n^{-1}\}$ en A^{-1} de tal manera que $x_n^{-1} \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} x_i^{-1}V$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto

$$E_n = \{x_k \in \{x_i\} : k \geq n\}.$$

Por la compacidad de A , existe $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{E_n}$. Sea U una vecindad de e tal que $U^2 \subseteq V$. Ya que $x \in \overline{E_1}$, existe $x_m \in E_1$ tal que $x_m \in Ux$ y, por tanto, $x^{-1} \in x_m^{-1}U$. Pero $x \in \overline{E_{m+1}}$ implica que $x^{-1} \in \overline{E_{m+1}^{-1}}$, por el [Lema 3.2.2.3](#). Por lo tanto, hay una $n > m$ tal que $x_n^{-1} \in x^{-1}U \subseteq x_m^{-1}U^2 \subseteq x_m^{-1}V$, lo cual contradice la elección de $\{x_n^{-1}\}$. ■

Teorema 3.2.2.1. Cada espacio de Hausdorff localmente compacto y que además es grupo con la operación continua es un grupo topológico.

DEMOSTRACIÓN: Dado que la operación de grupo es continua, basta con probar que la función inversión es continua. Primero mostremos que la inversión

es continua en e . Sea U un abierto que contiene a e . Probaremos que existe una vecindad compacta C de e tal que $In(C) = C^{-1} \subseteq U$. Supongamos lo contrario; esto es, para cada vecindad compacta C de e , se tiene que $C^{-1} \cap (G \setminus U) \neq \emptyset$. Ya que C es compacto, por el [Lema 3.2.2.3](#) también C^{-1} es compacto. Sea

$$\mathcal{G} = \{C^{-1} \cap (G \setminus U) : C \text{ es una vecindad compacta de } e\}.$$

Note que $\mathcal{G}$ es una familia de compactos que satisfacen la propiedad de la intersección finita. En efecto, si $\{C_1^{-1} \setminus U, \dots, C_n^{-1} \setminus U\} \subseteq \mathcal{G}$, entonces

$$\bigcap_{k=1}^n C_k^{-1} \setminus U = \left(\bigcap_{k=1}^n C_k \right)^{-1} \setminus U \neq \emptyset.$$

pues $\bigcap_{k=1}^n C_k^{-1}$ es una vecindad compacta de e y por lo asumido, toda vecindad compacta intersecciona al complemento de U .

Veamos ahora que $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$. Sea $A \in \mathcal{G}$ cualquier elemento de la familia. Definimos la siguiente familia

$$\mathcal{F} = \{A \cap B : B \in \mathcal{G}\}.$$

Como $\mathcal{G}$ satisface la propiedad de intersección finita, cada $A \cap B \neq \emptyset$. Además, $\mathcal{F}$ es una familia de cerrados en el espacio compacto A que satisface la propiedad de intersección finita, por lo que

$$\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset.$$

Así, $\bigcap \mathcal{G} \neq \emptyset$. Note que $\{e\} = \bigcap \{C^{-1} : C \text{ es una vecindad compacta de } e\}$. En efecto, dado que el grupo es de Hausdorff y localmente compacto, se tiene que para $x \neq e$, existe una vecindad compacta W de e tal que $x^{-1} \notin W$, lo que implica que $x \notin W^{-1}$. Así,

$$\bigcap \mathcal{G} \subseteq \bigcap C^{-1} = \{e\}.$$

De este modo $\{e\} = \bigcap \{C^{-1} \setminus U : C \text{ es una vecindad compacta de } e\}$ y en particular $e \notin U$, lo que contradice la elección de U .

Finalmente, la continuidad de la inversión en cada punto del grupo se sigue del [Corolario 3.1.1](#). ■

Corolario 3.2.2.1. Un espacio Hausdorff compacto que también es un grupo donde la operación es continua es un grupo topológico.

3.3 Sistemas de vecindades del neutro

Definición. Sean G un grupo y $U \subseteq G$, decimos que U es un conjunto **simétrico** si $U^{-1} = U$.

Proposición 3.3.1. En un grupo topológico siempre existe un sistema fundamental de vecindades simétricas de e .

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{V}$ un sistema fundamental de vecindades de e . Como $e = e^{-1}$, el [Teorema 3.1.1](#) prueba que para cada $V \in \mathcal{V}$, V^{-1} es una vecindad abierta de e . Pero $U = V \cap V^{-1}$ es una vecindad simétrica de e pues

$$(V \cap V^{-1})^{-1} = \text{In}(V \cap V^{-1}) = \text{In}(V) \cap \text{In}(V^{-1}) = V^{-1} \cap (V^{-1})^{-1} = V^{-1} \cap V.$$

Por lo tanto, como cada vecindad $V \in \mathcal{V}$ contiene una vecindad simétrica U . Así, la familia

$$\mathcal{U} = \{U : U = V \cap V^{-1} \text{ para algún } V \in \mathcal{V}\}$$

es un sistema fundamental de vecindades simétricas de e . ■

Observación 3.3.1. Note que la proposición de arriba no necesariamente es válida para grupos semi-topológicos debido a que la inversión no necesariamente es una función continua.

Lema 3.3.1. Sean G un grupo topológico y K un subconjunto compacto en G . Si $K \subseteq U$ para algún subconjunto abierto U de G , entonces existe V un abierto que contiene a e_G tal que $KV \subseteq U$.

DEMOSTRACIÓN: Consideremos el cerrado $C = G \setminus U$. Note que K y C son conjuntos disjuntos, así para el compacto K^{-1} se tiene que $e_G \notin K^{-1}C$, pues de otro modo, existirían $k \in K$ y $c \in C$ tales que $e_G = k^{-1}c$ y así

$k = c$, lo que contradice el que K y C sean conjuntos disjuntos. Luego por el [Teorema 3.1.2](#) el conjunto $K^{-1}C$ es cerrado y por la proposición anterior, existe V una vecindad simétrica de e_G tal que $V \cap K^{-1}C = \emptyset$, lo que implica que $KV \cap C = \emptyset$. Así, $KV \subseteq U$. ■

Proposición 3.3.2. Para cada vecindad W de e en un grupo topológico, si para cada conjunto finito $\{1, \dots, n\}$, $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, entonces existe una vecindad simétrica U de e tal que

$$U^{\varepsilon_1} \dots U^{\varepsilon_n} \subseteq W.$$

DEMOSTRACIÓN: Note que podemos considerar $\varepsilon_i = 1$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ dado que U es simétrica.

La prueba se hará por inducción. Por la [Proposición 3.3.1](#), existe una vecindad simétrica U de e , tal que $U = U^{-1} \subseteq W$.

Ahora supongamos que para W , existe una vecindad simétrica V del neutro tal que $V^n \subseteq W$. Por la continuidad de la operación del grupo se tiene que para V , existen dos vecindades del neutro Y y Z tales que $YZ \subseteq V$. Luego definiendo $U = Y \cap Y^{-1} \cap Z \cap Z^{-1} \subseteq V$ es fácil ver que esta es una vecindad simétrica del neutro, luego ya que $U \times U \subseteq Y \times Z$ implica que $U^2 = UU \subseteq YZ \subseteq V$, entonces usando lo anterior y que $U \subseteq V$, se tiene lo siguiente

$$U^{n+1} = U^{n-1}U^2 \subseteq U^{n-1}V \subseteq V^n \subseteq W.$$

Lo que concluye la prueba. ■

Proposición 3.3.3. Sea G un grupo topológico y $\mathcal{F}$ el sistema de todas las vecindades de e . Entonces para $A \subseteq G$ se tiene que

$$\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{F}} AU = \bigcap_{U \in \mathcal{F}} UA = \bigcap_{U, V \in \mathcal{F}} UAV$$

DEMOSTRACIÓN: Primero mostraremos que $\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{F}} AU$.

$\subseteq$) Sea $x \in \overline{A}$, sea $U \in \mathcal{F}$, entonces xU^{-1} es una vecindad de x , así $xU^{-1} \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto, $x \in AU$. Como U fue arbitrario en $\mathcal{F}$, entonces $x \in \bigcap_{U \in \mathcal{F}} AU$.

$\supseteq$) Sean $x \in \bigcap_{U \in \mathcal{F}} AU$ y V una vecindad de x , entonces como $V^{-1}x$ es una vecindad de e , se tiene que $V^{-1}x \in \mathcal{F}$. Así, $x \in AV^{-1}x$; esto implica que $x = av^{-1}x$ para algún $a \in A$ y para algún $v \in V$, lo que implica que $v = a$. Así $V \cap A \neq \emptyset$ y por tanto $x \in \overline{A}$.

Similarmente se puede mostrar que $\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{F}} UA$.

Ahora, mostraremos que $\overline{A} = \bigcap_{U, V} UAV$.

$\subseteq$) Sean $x \in \overline{A}$ y $U, V \in \mathcal{F}$, como xV^{-1} es una vecindad de x , entonces $xV^{-1} \cap A \neq \emptyset$. Así $xv^{-1} = a$ para algunos $v \in V$ y $a \in A$, por lo que $x = e_G av \in UAV$. Como U y V fueron arbitrarios en $\mathcal{F}$, entonces $x \in \bigcap_{U, V \in \mathcal{F}} UAV$.

$\supseteq$) Sean $x \in \bigcap_{U, V \in \mathcal{F}} UAV$ y W una vecindad de x , por la continuidad de la función $\otimes_G \circ (In_G, l_a) : G \rightarrow G$ y la [Proposición 3.3.1](#), existe una V vecindad simétrica de e_G tal que $VxV \subseteq W$. Como $x \in VAV$, existen $v, v' \in V$ y $a \in A$ tal que $x = vav'$, así $a = v^{-1}xv'^{-1} \in VxV \subseteq W$, esto es que $W \cap A \neq \emptyset$. Lo que prueba que $x \in \overline{A}$. ■

Corolario 3.3.1. Sea G un grupo topológico y U cualquier vecindad de e . Entonces hay una vecindad V de e tal que $\overline{V} \subseteq U$. Lo que implica, que todo grupo topológico es regular¹

DEMOSTRACIÓN: Por la [Proposición 3.3.2](#) podemos escoger una vecindad de e tal que $VV \subseteq U$ y por la [Proposición 3.3.3](#) se tiene que $\overline{V} \subseteq VV \subseteq U$. Para probar que G es regular, sean $x \in G$ y W una vecindad de x . Notemos primero que $x^{-1}W$ es una vecindad de e , y por lo probado anteriormente, existe V una vecindad de e tal que $\overline{V} \subseteq x^{-1}W$. Se sigue del hecho de que las traslaciones son homeomorfismos y del [Teorema 1.1.2.3](#) que

$$x \in \overline{xV} = \overline{r_x(V)} = r_x(\overline{V}) = x\overline{V} \subseteq W$$

Por lo que G es regular. ■

Teorema 3.3.1. En todo grupo topológico, existe un sistema fundamental $\mathcal{F}$ de vecindades cerradas(abiertas) de e tal que:

¹Recuerde que regular no significa T_3 , en este texto T_3 significa regular y T_2

- (a) Cada $U \in \mathcal{F}$ es simétrica.
- (b) Para todo $U \in \mathcal{F}$, existe $V \in \mathcal{F}$ tal que $V^2 \subseteq U$.
- (c) Para todo $U \in \mathcal{F}$ y $a \in G$, existe $V \in \mathcal{F}$ tal que $V \subseteq a^{-1}Ua$, o equivalentemente $aVa^{-1} \subseteq U$.

Recíprocamente, dado un grupo G y una base de filtro $\mathcal{B}$ que satisface (a)-(c), existe una única topología $\mathfrak{a}$ en G tal que $G_{\mathfrak{a}}$ es un grupo topológico y $\mathcal{B}$ forma un sistema fundamental de vecindades de e .

DEMOSTRACIÓN: Ya que G es un grupo topológico, en vista de [Proposición 3.3.1](#) y el [Corolario 3.3.1](#), existe un sistema fundamental $\mathcal{F}$ de vecindades de e tal que cada $U \in \mathcal{F}$ es simétrica y cerrada. Por lo que, $\mathcal{F}$ satisface la condición (a). La [Proposición 3.3.2](#) nos garantiza que $\mathcal{F}$ satisface la condición (b). Finalmente, (c) se sigue de la continuidad del automorfismo c_a .

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{B}$ es una base de filtro que satisface las condiciones (a)-(c) enunciadas en el teorema. Para cada $U \in \mathcal{B}$, por (a) y (b) existe un $V \in \mathcal{F}$ tal que $VV^{-1} \subseteq U$. De esta manera, si $x \in V$, $e = xx^{-1} \in VV^{-1} \subseteq U$, lo cual prueba que cada $U \in \mathcal{B}$ contiene a e . Por lo tanto, cada elemento de los sistemas $x\mathcal{B} := \{xU : U \in \mathcal{B}\}$ y $\mathcal{B}x := \{Ux : U \in \mathcal{B}\}$ contienen a x para cada $x \in G$. Se puede verificar fácilmente ([Teorema 2.2.1](#)) que $x\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}x$ son bases de filtro de x , pues $\mathcal{B}$ es una base de filtro de e .

Para probar que G es un grupo topológico, basta probar por la [Proposición 3.1.3](#) que $\otimes_-$ es continua. Sean $x, y \in G$ y U una vecindad de e , por (c), existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $Wy^{-1} \subseteq y^{-1}U$. Ahora por (b), existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V^2 \subseteq W$. Entonces $xV \times yV$ es una vecindad de (x, y) en $G \times G$ y

$$\otimes_- (xV \times yV) \subseteq xV \cdot V^{-1}y^{-1} \subseteq xWy^{-1} \subseteq xy^{-1}U.$$

■

El teorema anterior nos ayuda a definir topologías en un grupo de tal manera que estas lo hagan grupo topológico a partir de subconjuntos adecuados del neutro del grupo. Los siguientes ejemplos son muy recurrentes en la literatura.

Ejemplos. Sea G un grupo.

- 1) La **topología pro-finita** de G es determinada por la familia de todos los subgrupos normales de G con índice finito.
- 2) Para un número primo p . La **topología pro- p** es determinada por la familia de todos los subgrupos normales de G con índice finito siendo este potencia de p .
- 3) Para un número primo p . La **topología p -ádica** es determinada por la familia $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subgrupos normales de G , donde U_n es el subgrupo generado por el subconjunto $\{g^{p^n} : g \in G\}$.

3.4 Axiomas de separación y pseudométricas invariantes

Proposición 3.4.1. Sea G un grupo topológico, las siguientes enunciados son equivalentes:

- (i) G es T_0 .
- (ii) G es T_1 .
- (iii) $\{e\}$ es cerrado.
- (iv) G es T_2 .
- (v) $\bigcap_{U \in \mathcal{I}} U = \{e\}$, donde $\mathcal{I}$ es el sistema de todas las vecindades de e .

DEMOSTRACIÓN: (i) $\implies$ (ii). Supongamos que G es T_0 , sean $x, y \in G$ con $x \neq y$, entonces para al menos uno (digamos x) de x y y , existe una vecindad abierta P de x tal que $y \notin P$. Ahora bien, ya que $x^{-1}P$ es una vecindad abierta de e , entonces $Q = x^{-1}P \cap (x^{-1}P)^{-1} = x^{-1}P \cap P^{-1}x$ es una vecindad abierta simétrica de e y por lo tanto yQ es una vecindad abierta de y , veamos que $x \notin yQ$. Si $x \in yQ$, entonces $x = yq$ para algún $q \in Q$ y esto implica que $x^{-1} = q^{-1}y^{-1} \in Qy^{-1}$ esto último pues $Q = Q^{-1}$. Así

$$x^{-1} \in Qy^{-1} \subseteq x^{-1}Py^{-1}$$

Esto implica que $e = xx^{-1} \in xx^{-1}Py^{-1} = Py^{-1}$; luego entonces, $y \in P$, lo cual es una contradicción.

(ii) $\implies$ (iii). Es consecuencia de una equivalencia de ser espacio T_1 .

(iii) $\implies$ (iv). Supongamos que $\{e\}$ es cerrado, como la función $\otimes_-$ es continua por la [Proposición 3.1.3](#), entonces la diagonal Δ de $G \times G$ es cerrada, pues es la preimagen del conjunto cerrado $\{e\}$ bajo la función $\otimes_-$. Por lo tanto G es T_2 .

(iv) $\implies$ (v). Supongamos que G es T_2 y sea $x \in \bigcap_{U \in \mathcal{I}} U$, si $x \neq e$, por hipótesis se tendría que existen vecindades abiertas ajenas V y U de x y e , respectivamente. Pero como $x \in U$ implicaría que $x \in U \cap V = \emptyset$, lo cual es una contradicción.

(v) $\implies$ (i). Sean $x, y \in G$ con $x \neq y$. De aquí $xy^{-1} \neq e$, y así por la hipótesis, existe $U \in \mathcal{I}$ tal que $xy^{-1} \notin U$. Como Uy es una vecindad de y y $x \notin Uy$, se tiene que G es T_0 . ■

3.4.1 Pseudo-normas

Los siguientes resultados tienen como objetivo demostrar algunas propiedades de metrizabilidad en grupos topológicos y, además, probar uno de los resultados más importantes, que establece que todo grupo topológico es completamente regular.

Definición. Una **pseudonorma** en un grupo G es una función $v : G \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- (i) $v(e_G) = 0$;
- (ii) $v(x^{-1}) = v(x)$ para cada $x \in G$;
- (iii) $v(xy) \leq v(x) + v(y)$.

Y decimos que v en G es **norma** si además cumple que

- (iv) $v(x) = 0$ si y sólo si $x = e_G$.

Si (iii) es reemplazado por la siguiente condición más fuerte:

- (iii*) $v(xy) \leq \max\{v(x), v(y)\}$ para cada $x, y \in G$.

Entonces la (pseudo)norma es llamada **no Arquimediana**.

Además decimos que v es **invariante** si para cada $x, y \in G$ se tiene que

$$v(x) = v(y^{-1}xy)$$

Note que si ponemos yx en lugar de x en la fórmula anterior, se tiene que

$$v(yx) = v(xy),$$

para cualesquiera $x, y \in G$.

Observación 3.4.1.1. Las valores de una pseudonorma en un grupo G deben ser no negativos, pues para cada $x \in G$ se tiene:

$$0 = v(e_G) = v(xx^{-1}) \leq v(x) + v(x^{-1}) = v(x) + v(x) = 2v(x)$$

Además, note que $v : G \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ es una pseudonorma en G si y sólo si $v(e_G) = 0$ y $v(xy^{-1}) \leq v(x) + v(y)$ para cada $x, y \in G$.

Ejemplo. El ejemplo más familiar de norma es la norma usual de $\mathbb{R}$ definida por el valor absoluto $|a|$ para cada $a \in \mathbb{R}$.

Sea $r \in \mathbb{R}_{>0}$, denotaremos $B_r^v(e_G) := \{x \in G : v(x) < r\}$ la bola abierta con centro e_G y radio r . Cada pseudonorma v en un grupo abeliano genera una topología τ_v en G por medio de la base de filtro $\mathfrak{B}^v := \{B_r^v(e_G) : r \in \mathbb{R}_{>0}\}$

Definición. Una pseudo-métrica d en un grupo G se dice que es **invariante por la izquierda** si $d(ax, ay) = d(x, y)$ para todo $a, x, y \in G$. Si $d(xa, ya) = d(x, y)$ para cada $a, x, y \in G$, se dice que d es **invariante por la derecha**. Si d es invariante por izquierda y derecha, se dirá que es **invariante**.

Observación 3.4.1.2. Dado un grupo G . Toda pseudonorma v en G induce una pseudo-métrica d_v en G definida como sigue

$$d_v(x, y) = v(x^{-1}y) \text{ para cada } x, y \in G$$

Además esta pseudo-métrica es invariante por la izquierda. Y en particular, para cada $r \in \mathbb{R}_{>0}$, $B_r^v(e_G) = B_r^{d_v}(e_G)$.

Cabe notar que no siempre se tiene que una pseudo-métrica genera una pseudo-norma. Algunas cosas importantes de los grupos es que, toda pseudométrica d invariante por la izquierda en G induce una pseudo-norma de la siguiente forma

$$v_d(x) = d(x, e_G) \text{ para cada } x \in G$$

Con esto tenemos una correspondencia biyectiva $v \mapsto d_v$ entre pseudonormas de G en pseudométricas en G invariantes por izquierda; esto es $d = d_{v_d}$ para d una pseudométrica en G invariante por la izquierda.

Ejemplo. Sea $\ell^2 := \{\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum x_n^2 < +\infty\}$. Entonces ℓ^2 tiene una estructura natural de $\mathbb{R}$ -espacio vectorial inducida por $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Este conjunto es llamado *Espacio de Hilbert*. Ahora bien, para $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ definimos

$$\|\mathbf{x}\|_{\infty} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}$$

Esto define una norma en el grupo abeliano $(\ell^2, +)$ que induce una métrica invariante en ℓ^2 haciéndolo espacio métrico y grupo topológico.

Ejemplo. Para un primo p , la *norma p -ádica* $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ es definida como sigue. Se establece $|0|_p = 0$ y para $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, se define $\nu_p(r)$ como el único número $k \in \mathbb{Z}$ tal que $r = p^k \frac{a}{b}$, con $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ coprimos y $p \nmid a, b$. Hacemos $|r|_p = p^{-\nu_p(r)}$. Este es un ejemplo de una norma no Arquimediana en el grupo abeliano $(\mathbb{Q}, +)$.

Proposición 3.4.1.1. Sean G un grupo topológico, $k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y v, w dos pseudonormas en G . Entonces

- a) $kv : G \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por $(kv)(x) = kv(x)$, es una pseudonorma en G .
- b) $v+w : G \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por $(v+w)(x) = v(x) + w(x)$ es una pseudonorma en G .

DEMOSTRACIÓN: Para a), se tiene que $(kv)(e_G) = kv(e_G) = k0 = 0$. Si $x, y \in G$,

$$(kv)(xy^{-1}) = kv(xy^{-1}) \leq k(v(x) + v(y)) = kv(x) + kv(y) = (kv)(x) + (kv)(y).$$

Para b), $(v+w)(e_G) = v(e_G) + w(e_G) = 0 + 0 = 0$. Si $x, y \in G$,

$$\begin{aligned} (v+w)(xy^{-1}) &= v(xy^{-1}) + w(xy^{-1}) \leq (v(x) + v(y)) + (w(x) + w(y)) \\ &= (v(x) + w(x)) + (v(y) + w(y)) = (v+w)(x) + (v+w)(y). \end{aligned}$$

■

Proposición 3.4.1.2. Sean G y H grupos y $f : G \longrightarrow H$ un homomorfismo. Si v es una pseudonorma en H , entonces $w = v \circ f$ es una pseudonorma en G .

DEMOSTRACIÓN: Como f es homomorfismo de grupos, entonces

$$w(e_G) = (v \circ f)(e_G) = v(f(e_G)) = v(e_H) = 0$$

Ahora, si $x, y \in G$, entonces

$$w(xy^{-1}) = v(f(xy^{-1})) = v(f(x)f(y)^{-1}) \leq v(f(x)) + v(f(y)) = w(x) + w(y)$$

■

Lema 3.4.1.1. Si G es un grupo y v es una pseudonorma en G . Entonces para cada $x, y \in G$, $|v(x) + v(y)| \leq v(xy^{-1})$

DEMOSTRACIÓN: Notemos que por un lado se tiene que

$$\begin{aligned} v(y) = v(y^{-1}) = v(yxx^{-1}) &= v((y^{-1}x)x^{-1}) \leq v(y^{-1}x) + v(x) \\ &= v((y^{-1}x)^{-1}) + v(x) = v(x^{-1}y) + v(x). \end{aligned}$$

$$\text{Por lo que, } -v(x^{-1}y) \leq v(x) - v(y) \quad (1)$$

Por otro lado, se tiene que

$$v(x) = v(yy^{-1}x) = v(x^{-1}yy^{-1}) \leq v(x^{-1}y) + v(y^{-1}) = v(x^{-1}y) + v(y).$$

$$\text{Así, } v(x) - v(y) \leq v(x^{-1}y) \quad (2)$$

Entonces por (1) y (2) se llega a que

$$|v(x) - v(y)| \leq v(x^{-1}y).$$

■

Teorema 3.4.1.1. Sea G un grupo. Si $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada, entonces la función $v : G \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por

$$v(x) = \sup\{|f(yx) - f(y)| : y \in G\}$$

es una pseudonorma en G .

DEMOSTRACIÓN: Primero, notemos que

$$v(e_G) = \sup\{|f(ye_G) - f(y)| = |f(y) - f(y)| = 0 : y \in G\} = 0$$

Ahora, sean $x, y \in G$, entonces

$$\begin{aligned} v(xy) &= \sup\{|f(zxy) - f(z)| : z \in G\} \\ &\leq \sup\{|f(zxy) - f(zx)| + |f(zx) - f(z)| : z \in G\} \\ &\leq \sup\{|f(zxy) - f(zx)| : z \in G\} + \sup\{|f(zx) - f(z)| : z \in G\} \\ &\leq \sup\{|f(ty) - f(t)| : t \in G\} + v(x) \\ &= v(y) + v(x). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} v(y^{-1}) &= \sup\{|f(wy^{-1}) - f(w)| : w \in G\} \text{ haciendo } z = wy^{-1} \\ &= \sup\{|f(z) - f(zy)| : z \in G\} \\ &= v(y). \end{aligned}$$

Por lo que v es una pseudonorma en G . ■

Definición. Si G es un grupo topológico y $v : G \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ es una pseudonorma de G , entonces decimos que v es **continua**, si v es continua como función de G a $\mathbb{R}$. Similarmente, una pseudométrica d en G es **continua** si $d : G \times G \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ como función es continua.

Si (G, τ) es un grupo topológico y d es una pseudométrica en G , entonces d es continua precisamente cuando la topología τ es más fina que τ_d (la topología inducida por d) es decir que todo abierto en τ_d es abierto en τ .

Observación 3.4.1.3. Claramente, una pseudométrica d invariante por la izquierda es continua precisamente cuando la pseudonorma inducida v_d es continua.

Proposición 3.4.1.3. Sea G un grupo topológico, $g \in G$ y v una pseudonorma en G . Si v es continua, entonces la pseudonorma $v_g : G \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por $v_g(x) = v(g^{-1}xg)$ es una pseudonorma continua.

DEMOSTRACIÓN: Notemos primero que $v_g = v \circ c_{g^{-1}}$. Recordemos que $c_{g^{-1}}$ es un automorfismo continuo. Así, por la [Proposición 3.4.1.2](#) se tiene que v_g

es una pseudonorma en G . Más aún v_g es continua, por ser composición de funciones continuas. ■

Teorema 3.4.1.2. Sea G un grupo topológico y v una pseudonorma en G . La pseudonorma v es continua si y sólo si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe una vecindad abierta U de e_G tal que para cada $x \in U$, se cumple que $v(x) < \varepsilon$, esto es que, v es continua si y sólo si v es continua en e_G

DEMOSTRACIÓN: Si v es continua, v es continua en todos los puntos de G , en particular en e_G .

Recíprocamente, supongamos que dado $\varepsilon > 0$ existe un abierto U_ε que contiene a e_G tal que si $x \in U_\varepsilon$, entonces $v(x) < \varepsilon$. Sea $y \in G$, entonces yU_ε es una vecindad abierta de y , ahora si $z \in yU_\varepsilon$, entonces $y^{-1}z \in U_\varepsilon$. Así, $v(y^{-1}z) < \varepsilon$. Luego, por el [Lema 3.4.1.1](#) se tiene que

$$|v(y) - v(z)| < v(y^{-1}z) < \varepsilon.$$

Esto es, v es continua en y , $\forall y \in G$. ■

Teorema 3.4.1.3. Sea $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de vecindades simétricas de e en un grupo topológico G tales que $U_{k+1}^2 \subseteq U_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces existe $v : G \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ una pseudonorma continua en G tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$B_{2^{-n}}^v(e_G) \subseteq U_n \subseteq B_{2^{-n+1}}^v(e_G). \quad (1)$$

Además, $H = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$ es un subgrupo cerrado de G y $H = \{x \in G : v(x) = 0\}$.

Por lo que, v es una norma si y sólo si $H = \{e_G\}$. Más aún, si para cada $n \in \mathbb{N}$ y $g \in G$ se cumple que

$$y^{-1}U_n y \subseteq U_n$$

entonces v es invariante.

DEMOSTRACIÓN: Sea $D = \{\frac{m}{2^n} : m \in \mathbb{N}^+, n \in \mathbb{N}\}$ el conjunto números racionales diádicos positivos. Construiremos una colección $\{V_r : r \in D\}$ de abiertos que contienen a e_G como sigue: Si $r > 1$, ponemos $V_r = G$. Ahora,

para $l \in \mathbb{N}$, tomamos $V_{2^{-l}} = U_l$, en particular $V_1 = U_0$. Ahora bien, si $r \in D$, con $0 < r < 1$, se sabe que r tiene la forma

$$r = \frac{1}{2^{l_1}} + \frac{1}{2^{l_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{l_n}} \quad (2)$$

con $l_1, l_2, \dots, l_n \in \mathbb{N}$, $l_1 < l_2 < \cdots < l_n$, $n \in \mathbb{N}$. Definimos V_r como sigue

$$V_r = V_{2^{-l_1}} V_{2^{-l_2}} \cdots V_{2^{-l_n}} = U_{l_1} U_{l_2} \cdots U_{l_n} \quad (3)$$

Probaremos que para $r, s \in D$

$$r \leq s \text{ implica que } V_r \subseteq V_s \quad (4)$$

Note que podemos asumir que $s < 1$, pues en el caso $s \geq 1$ la contención es trivial, ahora escribiendo $s \in D$ como

$$s = \frac{1}{2^{m_1}} + \frac{1}{2^{m_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{m_N}} \quad (5)$$

con $m_1, m_2, \dots, m_N \in \mathbb{N}$, $m_1 < m_2 < \cdots < m_N$ y $N \in \mathbb{N}$. Note que $l_1 \geq m_1$, pues si por el contrario $l_1 \leq m_1 - 1$ se tendría que

$$s < \frac{1}{2^{m_1-1}} \leq \frac{1}{2^{l_1}} \leq r$$

lo cual es una contradicción. Supongamos entonces que $m_1 = l_1, \dots, m_k = l_k$ y $m_{k+1} < l_{k+1}$. Definiendo

$$r' = \sum_{i=k+1}^n \frac{1}{2^{l_i}} \quad \text{y} \quad s' = \sum_{i=k+1}^N \frac{1}{2^{m_i}}.$$

Note que $V_{r'} \subseteq V_{s'}$, implica que $V_r \subseteq V_s$. De este modo, se puede suponer que $m_1 < l_1$ y esto implica que $m_1 \leq l_1 - 1$, así se tiene que

$$r < \frac{1}{2^{l_1-1}} \leq \frac{1}{2^{m_1}} \leq s$$

como arriba, ahora veremos que $V_r \subseteq V_{2^{-l_1+1}} \subseteq V_{2^{-m_1}} \subseteq V_s$. La contención $V_{2^{-l_1+1}} \subseteq V_{2^{-m_1}}$ se sigue de que $m_1 \leq l_1 - 1$ y de que la sucesión $\{U_n\}$ es decreciente. La contención $V_{2^{-m_1}} \subseteq V_s$, se sigue de que los $V_{2^{-l}}$'s son vecindades

de e_G y de que $V_{2^{-m_1}}$ es un factor de V_s (3). Así solo basta mostrar la contención $V_r \subseteq V_{2^{-l_1+1}}$. Para ello usaremos inducción sobre n . Para $n = 1$ es claro. Ahora suponiendo que se cumple para n , si

$$\begin{aligned} V_r &= V_{2^{-l_1}} \underbrace{V_{2^{-l_2}} \cdots V_{2^{-l_n}} V_{2^{-l_{n+1}}}}_{\text{Aplicando la hipótesis de inducción a lo subrayado}} \\ &\subseteq V_{2^{-l_1}} V_{2^{-l_2+1}} & -l_2 + 1 \leq -l_1 \\ &\subseteq V_{2^{-l_1}} V_{2^{-l_1}} \\ &\subseteq V_{2^{-l_1+1}} \end{aligned}$$

Esta última contención se sigue de la hipótesis $U_{k+1}U_{k+1} \subseteq U_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Ahora veamos que

$$V_r V_{2^{-l}} \subseteq V_{r+2^{-l}}, \text{ para } r \geq 1 \text{ o } r = \sum_{k=1}^n 2^{-l_k} \text{ y } l > l_n \quad (6)$$

La primera afirmación es trivial si $r \geq 1$ pues $V_{r+2^{-l}} = G$. La segunda afirmación se sigue de la definición de $V_{r+2^{-l}} = V_r V_{2^{-l}}$, pues $l > l_n$.

Ahora, para $x \in G$, definimos

$$f(x) = \inf\{r \in D : x \in V_r\}.$$

Note que como $V_r = G$ para $r = 1$, entonces $f \leq 1$. De esta manera f es acotado, se sigue del [Teorema 3.4.1.1](#) que la función $v : G \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por

$$v(x) = \sup\{|f(yx) - f(y)| : y \in G\}$$

es una pseudonorma en G , lo que implica que H es un subgrupo, note que $v \geq f$. Ahora veamos la contención de (1). Sea $n \in \mathbb{N}$ y si $u \in G \setminus U_n$, entonces $u \notin U_n = V_{2^{-n}}$, lo que implica que $v(u) \geq f(u) \geq 2^{-n}$ (esto pues los V_r 's forman una sucesión creciente (4)). Así $u \notin B_{2^{-n}}^v(e_G)$. Lo que prueba que $B_{2^{-n}}^v(e_G) \subseteq U_n$. Ahora para la otra contención de (1), sea $n \in \mathbb{N}$, si $u \in U_n$, entonces $u, u^{-1} \in V_{2^{-n}}$. Ahora tomemos cualquier $z \in G$. Es fácil ver que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{k}{2^{n-1}} \leq f(z) < \frac{k+1}{2^{n-1}} =: r$. Esto implica que $r \in V_r$. Como consecuencia de (6), se tiene que $zu, zu^{-1} \in V_r V_{2^{-n}} \subseteq V_{r+2^{-n}}$ y por tanto

$f(zu), f(zu^{-1}) \leq r + 2^{-n}$. Dado que $f(z) \geq \frac{k}{2^{n-1}}$, concluimos que

$$f(zu) - f(z) \leq r + \frac{1}{2^n} - \frac{k}{2^{n-1}} = \frac{k+1}{2^{n-1}} - \frac{k}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = \frac{3}{2^n}. \quad (7)$$

De forma análoga se prueba que

$$f(zu^{-1}) - f(z) \leq \frac{3}{2^n}. \quad (8)$$

Estas desigualdades se cumplen para cada $z \in G$, por lo que reemplazando z por zu en (8) se tiene $f(u) - f(zu) \leq \frac{3}{2^n}$. Combinando ahora con (7) se tiene que $v(u) \leq \frac{3}{2^n} < \frac{1}{2^{n-2}}$. Así, hemos probado que $U_n \subseteq B_{2^{-n+2}}^v(e_G)$. La continuidad de v se sigue del [Teorema 3.4.1.2](#). Note que el conjunto H es cerrado, por la continuidad de v .

Para la última afirmación, si para cada $n \in \mathbb{N}$ y $g \in G$, se tiene que $g^{-1}U_n g \subseteq U_n$. Así por definición de f , se tiene que $f(g^{-1}xg) = f(x)$ para todo $x, g \in G$. Así

$$\begin{aligned} v(g^{-1}xg) &= \sup\{|f(zg^{-1}xg) - f(z)| : z \in G\} \\ &= \sup\{|f(gzg^{-1}x) - f(gzg^{-1})| : z \in G\} \\ &= \sup\{|f(wx) - f(w)| : w \in G\} = v(x) \end{aligned}$$

La penúltima igualdad se sigue de que la aplicación c_g , es en particular biyectiva. ■

De todo lo anterior se desprende el siguiente resultado que es muy importante en la teoría de grupos topológicos.

Teorema 3.4.1.4. Todo grupo topológico es completamente regular. Así todo grupo topológico T_0 , es un espacio de Tychonoff.

DEMOSTRACIÓN: Sean G un grupo topológico, $\emptyset \neq F \subseteq G$ un cerrado y $g \notin F$ y por la homegeneidad de G , podemos suponer que $g = e_G$. Sea U_1 una vecindad abierta simétrica de e_G tal que $U_1 \cap F = \emptyset$. Elijamos abiertos simétricos $U_2, U_3, \dots$ de e_G tales que $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ que satisfacen la hipótesis del lema anterior. Dicha sucesión existe debido al [Teorema 3.3.1](#). Sea $v : G \rightarrow [0, 1]$ la pseudonorma continua en G del teorema anterior. Entonces $v(F) = \{1\}$ y $v(e_G) = 0$. ■

Del [Teorema 3.4.1.3](#), se obtiene de forma inmediata el siguiente resultado

Corolario 3.4.1.1. Sea $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de vecindades simétricas de e en un grupo topológico G tales que $U_{k+1}^2 \subseteq U_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces existe $d : G \times G \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ una pseudométrica continua en G tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$B_{2^{-n}}^v(e_G) \subseteq U_n \subseteq B_{2^{-n+1}}^v(e_G)$$

Además, $H = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$ es un subgrupo cerrado de G y $H = \{x \in G : d(x, e_G) = 0\}$. Por lo que, d es una métrica si y sólo si $H = \{e_G\}$. Más aún, si para cada $n \in \mathbb{N}$ y $g \in G$ se cumple que

$$y^{-1}U_n y \subseteq U_n$$

entonces d es invariante.

Teorema 3.4.1.5. Sea G un grupo topológico T_0 . Entonces G es metrizable si y sólo si hay una base numerable de e_G . Y en este caso, la métrica se puede tomar invariante por la izquierda.

DEMOSTRACIÓN: Si G es metrizable, entonces sabemos que la colección $\{B_{\frac{1}{n}}^d(e_G) : n \in \mathbb{N}\}$ donde d es la métrica de G , es una base numerable de e_G . Recíprocamente, supongamos que $\{V_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una base numerable de e_G . Hacemos $U_1 = V_1 \cap V_1^{-1}$. Ahora habiendo definido $U_1 \dots, U_{k-1}$ definimos U_k como la vecindad abierta simétrica de e_G tal que $U_k \subseteq V_k \cap \bigcap_{i=1}^{k-1} U_i$ y $U_k^2 \subseteq U_{k-1}$, dicho U_k existe por el [Teorema 3.3.1](#). Así, la familia $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ satisface la hipótesis del [Corolario 3.4.1.1](#), y $H = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \{e_G\}$. Sea v la pseudométrica invariante por la izquierda como en el [Corolario 3.4.1.1](#). Claramente $v(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$, esto es, v es una métrica. El hecho de que $B_{2^{-n}}^v(e_G) \subseteq U_n \subseteq B_{2^{-n+1}}^v(e_G)$ implica inmediatamente que la topología inducida por la métrica v coincide con la topología de G . ■

Definición. Se dice que un espacio topológico (X, τ) **admite una estructura de grupo topológico** si existe $\otimes : X \times X \rightarrow X$ una operación binaria que hace de $(X, \otimes, \tau)$ un grupo topológico.

Corolario 3.4.1.2. La línea de Sorgenfrey no admite una estructura de grupo topológico.

DEMOSTRACIÓN: Esto se sigue de que la línea de Sorgenfrey es un espacio T_0 , primero numerable y no metrizable. ■

3.5 Subgrupos topológicos

De aquí en adelante G es un grupo topológico y $H \leq G$. Entonces a H lo dotaremos con la topología de subespacio inducida por G . Es claro que H con esta topología es un grupo topológico.

Recordemos que $H \subseteq G$ es un subgrupo siempre que $HH^{-1} \subseteq H$ y $H \neq \emptyset$.

Proposición 3.5.1. Si G es un grupo topológico y $H \leq G$, entonces $\overline{H}$ es también un subgrupo de G . Si H es normal, entonces $\overline{H}$ también lo es.

DEMOSTRACIÓN: Sea $H \leq G$. Por la continuidad de $\otimes_-$ se tiene que

$$\overline{H} \overline{H}^{-1} = \otimes_-(\overline{H} \times \overline{H}) = \otimes_-(\overline{H \times H}) \subseteq \overline{\otimes_-(H \times H)} = \overline{HH^{-1}} \subseteq \overline{H}.$$

Esto prueba que $\overline{H}$ es subgrupo.

Ahora si H es un subgrupo normal de G , usando los automorfismos c_a (Véase el [Teorema 3.1.1](#)), tenemos que para cada $a \in G$,

$$\overline{H} = a\overline{H}a^{-1};$$

esto es, $\overline{H}$ es normal. ■

Proposición 3.5.2. Si G es un grupo semi-topológico y H un subgrupo abierto de G , entonces H es cerrado también.

DEMOSTRACIÓN: Por el [Corolario 2.1.1](#), xH es abierto y como

$$H = G \setminus \bigcup_{x \in G \setminus H} xH, \quad H \text{ es cerrado}$$

La igualdad se satisface pues la familia $\{xH : x \in G\}$ forma una partición de G . ■

Proposición 3.5.3. Si G es un grupo topológico de Hausdorff y $H \subseteq G$ es conmutativo, entonces $\overline{H}$ también es conmutativo.

DEMOSTRACIÓN: Dado que G es de Hausdorff, la diagonal $\Delta \subseteq G \times G$ es un conjunto cerrado. Sea $K = \{(x, y) \in G \times G : xy = yx\}$. Definimos la función $h : G \times G \rightarrow G$ dada por $h(x, y) = (xy, yx)$. Como $K = h^{-1}(\Delta)$ y h es continua, entonces K es cerrado en $G \times G$. Como H es conmutativo se tiene $H \times H \subseteq K$. De aquí,

$$\overline{H} \times \overline{H} = \overline{H \times H} \subseteq \overline{K} = K$$

Con esto se concluye que $\overline{H}$ es conmutativo. ■

Proposición 3.5.4. Si G es grupo topológico y $H \leq G$, entonces H es abierto si y sólo si H tiene un punto interior.

DEMOSTRACIÓN: La necesidad es inmediata. Ahora bien, si H tiene un punto interior, digamos $x \in H$, entonces existe un abierto U que contiene a x tal que $U \subseteq H$. Ahora, sea $y \in H$, sabemos que la traslación $r_{x^{-1}y}$ es tal que $r_{x^{-1}y}(x) = y$. Así

$$y \in Ux^{-1}y = r_{x^{-1}y}(U) \subseteq r_{x^{-1}y}(H) = Hx^{-1}y \subseteq H$$

lo cual prueba que y es un punto interior de H . Por lo tanto, H es abierto. ■

Proposición 3.5.5. Sean G un grupo topológico y $H \leq G$. Entonces H es cerrado si y sólo si existe U una vecindad cerrada de e tal que $H \cap U$ es un conjunto cerrado.

DEMOSTRACIÓN: $\implies$) Si H es cerrado, entonces para toda vecindad cerrada U de e , se tiene que $H \cap U$ es un conjunto cerrado.

$\impliedby$) Si existe una vecindad cerrada U de e tal que $H \cap U$ es cerrado. Elijamos una vecindad simétrica V de e tal que $V^2 \subseteq U$. Sean $x \in \overline{H}$ y una red $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ que converge a x . Por la [Proposición 3.5.1](#), se tiene que $x^{-1} \in \overline{H}$, y por tanto existe $y \in Vx^{-1} \cap H$. Además, para xV , existe $\alpha_0 \in D$ tal que para todo $\alpha \geq \alpha_0$, $x_\alpha \in xV$. Por lo tanto, para $\alpha \geq \alpha_0$, tenemos que $yx_\alpha \in Vx^{-1}xV = V^2 \subseteq U$. Así $yx_\alpha \in U \cap H$, pues $y, x_\alpha \in H$ y H es subgrupo.

Como por hipótesis $H \cap U$ es cerrado, $yx \in U \cap H$, pues yx_α converge a yx . Así, $yx \in H$, luego entonces $x = y^{-1}yx \in H^2 = H$. ■

Proposición 3.5.6. Sea G un grupo topológico de Hausdorff y $M \subseteq G$. Entonces el siguiente conjunto conjunto es cerrado

$$C_G(M) = \{x \in G : xm = mx \text{ para todo } m \in M\}.$$

DEMOSTRACIÓN: Para cada $m \in M$, definimos el conjunto

$$C_G(m) = \{x \in G : xm = mx\}.$$

Definimos la función $h : G \rightarrow G \times G$ dada por $h(x) = (mx, xm)$. Como h es continua y la diagonal $\Delta \subseteq G \times G$ es cerrada por ser G de Hausdorff, entonces el conjunto $C_G(m) = h^{-1}(\Delta)$ es cerrado. Es fácil ver que

$$C_G(M) = \bigcap_{m \in M} C_G(m),$$

por lo que $C_G(M)$ es cerrado. ■

Note que en particular el centro de grupo topológico $Z(G) = C_G(G)$ es cerrado.

Proposición 3.5.7. Si G es un grupo topológico y U una vecindad simétrica de e . Entonces,

$$H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U^n$$

es un subgrupo abierto y cerrado de G .

DEMOSTRACIÓN: Primero veamos que H es un subgrupo de G . Sean $x, y \in H$, entonces existen $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U^n$ y $y \in U^m$. Ahora, notemos que

$$xy^{-1} \in U^n(U^m)^{-1} = U^n(U^{-1})^m = U^nU^m = U^{n+m} \subseteq H$$

Para mostrar que H es abierto, sea $y \in H$, entonces yU es un abierto que contiene a y y $yU \subseteq yH = H$. Lo que prueba que H es abierto y por tanto cerrado por la [Proposición 3.5.2](#). ■

Teorema 3.5.1. Si G es un grupo topológico conexo, entonces toda vecindad U de e , satisface que $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U^n$. En otras palabras, todo grupo topológico conexo es generado por cualquier vecindad de e .

DEMOSTRACIÓN: Sea U una vecindad de e . Elijamos a V una vecindad simétrica de e tal que $V \subseteq U$. Por la [Proposición 3.5.7](#), se tiene que el conjunto

$$H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V^n.$$

es cerrado y abierto, y dado que G es conexo, entonces $G = H$ por el [Teorema 1.1.6.1](#). Como $H \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U^n$, se concluye que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U^n = G$. ■

El recíproco del teorema anterior no es cierto. Considere $\mathbb{R}$ con la topología y suma usual. Note que el subespacio (y subgrupo) $\mathbb{Q}$ no es conexo pero mostraremos que $\mathbb{Q}$ es generado por cualquier vecindad del 0. Sea V una vecindad del 0 en $\mathbb{Q}$. Note que para probar que V genera a $\mathbb{Q}$, basta con probar que $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} \subseteq V$. Como el 0 es un punto de acumulación de A , se tiene que existen a lo más una cantidad finita de elementos de la forma $\frac{1}{n} \in A$ que no pertenecen a V . Supongamos que $\frac{1}{m} \notin V$, elegimos $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{km} \in V$, notemos que

$$\frac{1}{m} = k \frac{1}{km} \in kV \subseteq \langle V \rangle.$$

Por lo tanto, $\langle V \rangle = \mathbb{Q}$.

Definición. Se dirá que un grupo topológico G es **compactamente generado**, si existe X un subconjunto compacto de G tal que el único subgrupo que contiene a X es G . En tal caso, se dirá que G es compactamente generado por X . En otras palabras, G es el subgrupo más pequeño que contiene X .

Ejemplos.

1. $(\mathbb{R}, +)$ es compactamente generado por $[0, 1]$.
2. Todo grupo compacto, es compactamente generado.

Corolario 3.5.1. Todo grupo topológico localmente compacto y conexo es compactamente generado.

DEMOSTRACIÓN: Sea K una vecindad compacta de e_G , entonces por el Teorema 3.5.1, se tiene que $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K^n$, esto es, G es compactamente generado por K . ■

Proposición 3.5.8. Sean G un grupo topológico y C es la componente conexa de e_G , entonces C es un subgrupo normal cerrado.

DEMOSTRACIÓN: Por el Teorema 1.1.6.5, C es un conjunto cerrado. Ahora, para probar que C es un subgrupo normal, sea $a \in C$. Entonces $a^{-1}C$ es un conjunto conexo que contiene a e , debido a la continuidad de la función $l_{a^{-1}}$. Así, por la definición de componente conexa se tiene que $a^{-1}C \subseteq C$. Dado que a fue arbitrario en C , se tiene que

$$\bigcup_{a \in C} a^{-1}C = C^{-1}C \subseteq C.$$

Lo cual prueba que C es un subgrupo de G .

Ahora, mostraremos que C es normal. Sea $x \in G$, entonces debido a la continuidad del automorfismo c_x se tiene que el conjunto xCx^{-1} es conexo y dado que $e \in xCx^{-1}$, entonces por la definición de componente conexa se tiene que $xCx^{-1} \subseteq C$. ■

Para un grupo topológico G , el siguiente resultado se sigue debido a la continuidad de la función $f : G \rightarrow G$ dada por $f(x) = x^n$.

Lema 3.5.1. Sean G un grupo topológico y $K \subseteq G$ conexo, entonces K^n es un subconjunto conexo de G .

Proposición 3.5.9. Sean G un grupo topológico y $K \subseteq G$. Si K es conexo, entonces el subconjunto $\langle K \rangle$ es conexo.

DEMOSTRACIÓN: Consideremos $K_0 = KK^{-1}$, este es un subconjunto conexo debido a la continuidad de la función $\otimes_-$. Notemos que $e \in K_0$ y que $K \cup K^{-1} \subseteq KK^{-1}$, así notemos primero que $\langle K_0 \rangle = \langle K \rangle$ y que

$$\langle K_0 \rangle = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_0^n.$$

Como K_0 es conexo, por el lema anterior cada K_0^n es conexo y además $e \in K_0^n$, por lo que $\langle K_0 \rangle$ es conexo. ■

Proposición 3.5.10. Sean G un grupo topológico de Hausdorff y C la componente conexa de e . Si G/C es un conjunto finito con k elementos, entonces para cada $a \in G$, el conjunto $C_a = \{xax^{-1} : x \in G\}$ es infinito ó tiene a lo más k elementos.

DEMOSTRACIÓN: Sea $a \in G$ tal que C_a es un conjunto finito. Note que debido a la continuidad de la función c_a y a que G es de Hausdorff, se tiene que la imagen de cualquier subconjunto conexo bajo c_a es un conjunto unipuntual. Ahora, sean $x, y \in G$ tales que $xax^{-1}C = yay^{-1}C$, como cada una de estas clases es un conjunto conexo pues C es conexo, se tiene entonces que $\{xax^{-1}\} = c_a(xax^{-1}C) = c_a(yay^{-1}C) = \{yay^{-1}\}$, esto prueba la inyectividad de la función canónica $\pi : C_a \rightarrow G/C$, así $|C_a| \leq |G/C| = k$. ■

El conjunto C_a se le llama **conjunto de conjugados** de a .

Corolario 3.5.2. Sea G es un grupo topológico de Hausdorff con más de un punto. Si G conexo, entonces para cada $a \in G \setminus Z(G)$ se tiene que el conjunto de conjugados de a es infinito.

Proposición 3.5.11. Sean G es un grupo topológico y $H \leq G$. Entonces H es discreto si y sólo si existen $x \in H$ y un abierto U de G tal que $U \cap H = \{x\}$; esto es, x es un punto aislado de H .

DEMOSTRACIÓN: La necesidad es inmediata. Para la suficiencia, supongamos que existe $x \in H$ y un abierto U de G tal que $U \cap H = \{x\}$. Sea $y \in H$, sabemos que $Ux^{-1}y$ es un abierto de y , mostraremos que $(Ux^{-1}y) \cap H = \{y\}$. Sea $z \in Ux^{-1}y \cap H$, entonces $z = ux^{-1}y$ para algún $u \in U$; de esto, $u = zy^{-1}x \in H \cap U = \{x\}$, así $z = y$. Por lo tanto H es un subgrupo discreto. ■

Observación 3.5.1. Note que en la proposición anterior no fue necesario usar la función inversión.

Haciendo uso de las traslaciones y la proposición anterior, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 3.5.3. Sean G un grupo topológico y $H \leq G$. Entonces H es discreto si y sólo si e_G es un punto aislado de H .

Proposición 3.5.12. Sean G es un grupo topológico de Hausdorff y $H \leq G$. Si H es discreto, entonces H es cerrado.

DEMOSTRACIÓN: Por el [Corolario 3.3.1](#) y por hipótesis G es de Hausdorff. Así G es T_3 . Ahora bien, como H es discreto, se tiene que existe un abierto V de e tal que $H \cap V = \{e\}$, luego por ser G un espacio T_3 , para $e \in V$, existe un abierto U de e tal que $U \subseteq \overline{U} \subseteq V$, así el conjunto $H \cap \overline{U} = \{e\}$ es cerrado pues G es de Hausdorff. De esta manera, [Proposición 3.5.5](#) se tiene que H es cerrado. ■

Una generalización de la proposición anterior nos la proporciona el siguiente resultado.

Proposición 3.5.13. Sean G es un grupo topológico de Hausdorff y H es un subgrupo localmente compacto de G , entonces H es cerrado.

DEMOSTRACIÓN: Sea K una vecindad compacta de e en H . Como G es de Hausdorff, se sigue que K es cerrado, así $K \cap H = K$ es cerrado, de este modo por la [Proposición 3.5.5](#) se concluye que H es cerrado. ■

El siguiente ejemplo muestra que las conclusiones de la proposición anterior, la [Proposición 3.5.12](#) y la [Proposición 3.5.1](#) no son válidas si la función inversión no es continua. Sea $G = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $V_n = \{\mathbf{x} \in G : \forall k \leq n, \mathbf{x}(k) = 0 \text{ y } \forall k > n, \mathbf{x}(k) \geq 0\}$. Los conjuntos V_n inducen τ una topología en G donde para cada $\mathbf{x} \in G$, la familia $\{\mathbf{x} + V_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de vecindades de $\mathbf{x}$. Mostraremos (G, τ) es de Hausdorff y que τ hace continua a la operación de G y que existe un subgrupo H discreto, no cerrado y tal que $\overline{H}$ no es un subgrupo de G . Para mostrar la continuidad de la operación de G , solo basta con notar que $V_n + V_n \subseteq V_n$. Ahora, veamos que G es de Hausdorff. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in G$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, entonces $\mathbf{x}(i) \neq \mathbf{y}(i)$ para alguna $i \in \mathbb{N}$, note que $(\mathbf{x} + V_i) \cap (\mathbf{y} + V_i) = \emptyset$. Esto prueba que G es de Hausdorff. Es fácil ver la función inversión no es continua. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{e}_i \in G$ es la función $\mathbf{e}_i(n) = \delta_{in}$. Consideremos $H = \langle \{e_0 + e_n : n \in \mathbb{N}^*\} \rangle$. Primero mostremos que H es discreto, por la [Observación 3.5.1](#) basta con mostrar que el $\mathbf{0}$ es un punto aislado de H , para ello note que $V_n \cap H = \{\mathbf{0}\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, en efecto, si $\mathbf{x} \in V_n \cap H$, entonces $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m n_i(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_{k_i})$ para algunos $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{Z}$ y algunos $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$, así $\mathbf{x} = \left(\sum_{i=1}^m n_i \right) \mathbf{e}_0 + \sum_{i=1}^m n_i \mathbf{e}_{k_i}$ y como $\mathbf{x} \in V_n$, se

tiene que $\sum_{i=1}^m n_i = 0$ y $n_i \geq 0$ para cada $i \in \mathcal{I}_m$, de esto se deduce que cada $n_i = 0$, por lo que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ahora, veamos que $H \neq \overline{H}$. Para ello, mostraremos que $2\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 \in \overline{H} \setminus H$. Primero veamos que $2\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 \in H$. Sea $m \in \mathbb{N}$, tomemos $k > m$, notemos que $2\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_k = (\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1) + (\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_k) \in ((2\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1) + V_n) \cap H$, así $2\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 \in \overline{H}$. Es fácil ver que $2\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 \notin H$. Veamos que $-2\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1 \notin \overline{H}$. Para ello, probaremos que $((-2\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1) + V_1) \cap H = \emptyset$, supongamos lo contrario, esto es, $-2\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1 + \mathbf{v}_1 = \left(\sum_{i=1}^m n_i \mathbf{e}_0 \right) + \sum_{i=1}^m n_i \mathbf{e}_{k_i}$, para algunos $\mathbf{v}_1 \in V_1$, $m \in \mathbb{N}$, $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{Z}$, $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$, podemos suponer que $n_1 = -1$ y $k_1 = 1$, ahora, como $-2\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1 + \mathbf{v}_1 \in (-2\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1) + V_1$, entonces para cada $i \in \mathcal{I}_m \setminus \{1\}$, $n_i \geq 0$, así como $\sum_{i=1}^m n_i = -2$ se deduce que $-1 = n_1 \leq -2$, lo cual es una contradicción.

Proposición 3.5.14. Sean G es un grupo topológico de Hausdorff conexo y $H \leq G$ es normal y discreto, entonces H es un subgrupo cerrado normal del centro de $Z(G)$ de G .

DEMOSTRACIÓN: Por la [Proposición 3.5.12](#), se tiene que H es cerrado. Solo basta ver que H está contenido en el centro de G . Sea $a \in H$. Como H es discreto, existe una vecindad U de a tal que $H \cap U = \{a\}$. Notemos que la función $f : G \rightarrow G$ dada por $f(x) = x^{-1}ax$ es continua, pues es la composición de la operación del grupo con la función continua $h : G \rightarrow G \times G$ dada por $h(x) = (x^{-1}, ax)$. Así, podemos considerar a una vecindad simétrica V de e tal que $y^{-1}ay \subseteq U$ para todo $y \in V$.

Luego, ya que H es un subgrupo normal se tiene que $y^{-1}ay \in H \cap U = \{a\}$. Lo que implica que $ay = ya$ para cada $y \in V$. Ahora bien, dado que G es conexo, por el [Teorema 3.5.1](#) se tiene que $G = \bigcup_{i=1}^n V^n$. Por lo que, para $x \in G$, existen $y_i \in V$ con $i \in \{1, \dots, n\}$ para alguna $n \geq 1$ tales que $x = y_1 y_2 \cdots y_n$. Así,

$$\begin{aligned} x^{-1}ax &= (y_1 y_2 \cdots y_n)^{-1} a (y_1 y_2 \cdots y_n) \\ &= y_n^{-1} \cdots y_2^{-1} y_1^{-1} a y_1 y_2 \cdots y_n \\ &= a \end{aligned}$$

pues $y_i^{-1}ay_i = a$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Lo cual prueba que a está en el centro de G . ■

Notación. Grupo-LCA, significará un grupo topológico abeliano de Hausdorff y localmente compacto.

Definición. Si G y H son dos grupos topológicos decimos que una función $f : G \rightarrow H$ es un **homomorfismo continuo** si f es un homomorfismo de grupos y a su vez es una función continua. Decimos que f es **isomorfismo** si f es isomorfismo de grupos y además homeomorfismo. Si $G = H$ y f es un isomorfismo, decimos que f es un **automorfismo**.

Proposición 3.5.15. Sea G un grupo topológico. Si G conexo, entonces el conmutador $[G, G]$ de G es conexo.

DEMOSTRACIÓN: Consideremos el conjunto $K = \{g_1^{-1}g_2^{-1}g_1g_2 : g_1, g_2 \in G\}$. Por definición del conmutador, se sabe que $[G, G] = \langle K \rangle$. No es difícil ver que la función $f : G \times G \rightarrow K$ dada por $f(g_1, g_2) = g_1^{-1}g_2^{-1}g_1g_2$ es continua y suprayectiva. De esta manera, el conjunto K es conexo y ya que K es un conjunto simétrico, se tiene que el conmutador es

$$[G, G] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K^n$$

y dado que K es conexo, se tiene que cada K^n es conexo y $e_G \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K^n$. Se sigue del Teorema 1.1.6.3, que $[G, G]$ es conexo. ■

Proposición 3.5.16. Sean G un grupo topológico y H y K subgrupos de G tales que $K \subseteq H$ y $[H, H] \subseteq K$. Entonces $[\overline{H}, \overline{H}] \subseteq \overline{K}$.

DEMOSTRACIÓN: Sean $x, y \in \overline{H}$ y U un abierto que contiene a $xyx^{-1}y^{-1}$. Notemos que la continuidad de la función $f : G \times G \rightarrow G$ dada por $f(a, b) = aba^{-1}b^{-1}$, implica que existen abiertos W y V que contienen a x y y respectivamente tales que $f(W \times V) \subseteq U$. Por otra parte como $x, y \in \overline{H}$, entonces existen $v \in V \cap H$ y $w \in W \cap H$, como $[H, H] \subseteq K$ y $f(W \times V) \subseteq U$, se tiene que $vwv^{-1}w^{-1} \in K \cap U$. Esto prueba que $xyx^{-1}y^{-1} \in \overline{K}$. ■

Proposición 3.5.17. Si G es un grupo topológico conexo y H es un subgrupo normal totalmente desconexo, entonces $H \subseteq Z(G)$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $h \in H$, es fácil ver que la función $f : G \rightarrow G$ dada por $f(g) = ghg^{-1}$ es continua. Observe que como H es un subgrupo normal, se tiene que $\text{Im } f \subseteq H$. Luego $f(G)$ es un subconjunto conexo en H . Como H es totalmente desconexo, $f(G)$ es un conjunto unipuntual. Ahora note que como $h = f(e)$, entonces $\{ghg^{-1} : g \in G\} = f(G) = \{h\}$, esto implica que $gh = hg$ para todo $g \in G$, es decir que $h \in Z(G)$. ■

Lema 3.5.2. Sea G un grupo compacto. Si $C \subseteq G$ es abierto y cerrado tal que $e_G \in C$, entonces C contiene un subgrupo normal y abierto.

DEMOSTRACIÓN: Para cada $x \in C$, sea el conjunto $W_x = Cx^{-1}$, entonces por la [Proposición 3.3.2](#), existe S_x un abierto que contiene a e_G tal que $S_x^2 \subseteq W_x$. Como C es compacto, existen $x_1, \dots, x_n \in C$ tales que $C \subseteq \bigcup_{i=1}^n S_{x_i}x_i$. El conjunto $S = \bigcap_{i=1}^n S_{x_i}$ es un abierto que contiene a e_G . Luego

$$SC \subseteq \bigcup_{i=1}^n SS_{x_i}x_i \subseteq \bigcup_{i=1}^n W_{x_i}x_i \subseteq C$$

Ponemos $H = S \cap S^{-1}$, usando inducción se puede probar que $\langle H \rangle \subseteq C$. Y como C es compacto, entonces H tiene una cantidad finita de conjugados, cuya intersección es un subgrupo normal abierto contenido en C . ■

Proposición 3.5.18. Sea G un grupo compacto y totalmente desconexo. Entonces.

- i) Todo abierto en G es la unión de clases laterales de subgrupos normales y abiertos.
- ii) Un subconjunto de G es abierto y cerrado si y sólo si es la unión finita de una cantidad finita de subgrupos normales y abiertos.
- iii) Si $S \subseteq G$, entonces

$$\overline{S} = \bigcap \{NS : N \trianglelefteq G, N \text{ abierto de } G\}$$

DEMOSTRACIÓN: i) Sean U un abierto de X y $x \in X$. Como Ux^{-1} es un abierto que contiene e_G , se tiene por el [Teorema 1.1.6.8](#) y del lema anterior,

que existe un subgrupo abierto y normal K tal que $K_x \subseteq Ux^{-1}$. Por lo que

$$U = \bigcup_{x \in U} K_x x$$

ii) $\implies$) Si C es un abierto y cerrado de X , entonces por i), C es unión de clases laterales de subgrupos normales y abiertos, como C es compacto, es la unión finita de estos.

$\Longleftarrow$) Es claro que toda unión finita de subgrupos normales abiertos es un conjunto cerrado y abierto.

iii) $\subseteq$) Se sigue de la [Proposición 3.3.3](#).

$\supseteq$) Sea $y \notin \overline{S}$, entonces existe un abierto conteniendo a y disjunto de S , así por i), existe N un subgrupo normal abierto tal que $Ny \cap S = \emptyset$. Así, $y \notin NS$. ■

3.6 Grupo cociente

En esta sección, se estará trabajando continuamente con grupos semi-topológicos,

Sea G un grupo y $H \leq G$. Recordemos que en G se define la relación de equivalencia $x \sim y$ si y sólo si $x - y \in H$. Las clases de equivalencia de esta relación son de la forma

$$[g] = \{gh : h \in H\} =: gH$$

Al conjunto $G/H := \{gH : g \in G\}$ le llamamos **conjunto cociente**. La función $\varphi : G \longrightarrow G/H$ dada por $\varphi(x) = xH$, se le llama función canónica de G en G/H . Si G es un grupo (semi)topológico, a G/H lo consideraremos con la topología cociente determinada por la función canónica φ ; esto es, $U \subseteq G/H$ es un abierto en G/H si y sólo si $\varphi^{-1}(U)$ es abierto en G . De esta manera, a G/H con esta topología lo llamaremos **espacio cociente**.

Las propiedades importantes de φ están enlistadas en el siguiente resultado.

Proposición 3.6.1. Sea G un grupo semi-topológico y H un subgrupo de G . Si G/H el espacio cociente, entonces:

i) φ es suprayectiva.

ii) φ es continua.

iii) La topología cociente en G/H es la topología más fina que hace continua a la función φ .

iv) φ es abierta;

DEMOSTRACIÓN: i), ii) y iii) son resultados conocidos de topología general. Ahora para probar iv), sea $U \subseteq G$ un abierto en G . Tenemos que probar que $\varphi^{-1}(\varphi(U))$ es un abierto en G . Note que

$$\varphi^{-1}(\varphi(U)) = \{x \in G : x \in uH \text{ para algún } u \in U\} = UH$$

Este último conjunto se sabe que es abierto en G . Por lo tanto φ es abierta. ■

De aquí en adelante, φ denotará la función canónica de G en G/H , salvo que se diga lo contrario.

Proposición 3.6.2. Sea G un grupo semi-topológico y H un subgrupo de G . Entonces G/H es un espacio homogéneo.

DEMOSTRACIÓN: Sean $x_1H, x_2H \in G/H$, tomemos $a \in G$ tal que $ax_1 = x_2$. Definimos la función $f_a : G/H \rightarrow G/H$ dada por $f_a(xH) = (ax)H$. Es fácil ver que esta función está bien definida y es inyectiva pues su inversa es precisamente $f_{a^{-1}}$. Así, para probar que f_a es continua y abierta, bastará mostrar que f_a es abierta. Sea $\widehat{U}$ un abierto de G/H , note que $\widehat{U} = \varphi(U)$ donde U es un abierto de G , a saber $U = \varphi^{-1}(\widehat{U})$, pero $f_a(\widehat{U}) = \varphi(aU)$, el cual es abierto pues φ es abierta y aU es un abierto en G . Por lo tanto, f_a es un homeomorfismo tal que $f_a(x_1H) = (ax_1)H = x_2H$. ■

Proposición 3.6.3. Sea G un grupo (semi)topológico y H un subgrupo de G . Entonces:

a) G/H es un espacio T_1 si y sólo si H es cerrado en G .

b) G/H es discreto si y sólo si H es abierto en G .

DEMOSTRACIÓN: a) $\implies$) Si G/H es T_1 , todo conjunto unitario es cerrado. Así, dado que $\varphi^{-1}(\{H\}) = H$ por la continuidad de φ , se tiene que H es cerrado.

$\Leftarrow$) Si H es cerrado. Sea $x \in G$, sabemos que xH es cerrado en G . Así $G \setminus xH$ es abierto en G , y como $\varphi(G \setminus xH) = G/H \setminus \{xH\}$, entonces $G/H \setminus \{xH\}$ es abierto y con esto $\{xH\}$ es cerrado en G/H .

b) $\Rightarrow$) Supongamos que G/H es discreto, en particular $\{H\}$ es abierto en G/H . Así, $\varphi^{-1}(\{H\}) = H$ es abierto en G .

$\Leftarrow$) Supongamos que H es abierto. Dado $x \in G$, sabemos que xH es abierto en G . Así, $\varphi(xH) = \{xH\}$ es abierto en G/H ; esto es, G/H es discreto. ■

Teorema 3.6.1. Sean G un grupo semi-topológico y $H \leq G$. Si $\mathcal{F}$ es un sistema fundamental de vecindades de e en G , entonces $\widehat{\mathcal{F}} = \{\varphi(U) : U \in \mathcal{F}\}$ es un sistema fundamental de vecindades de $H = \varphi(e_G)$ en G/H .

DEMOSTRACIÓN: Por la [Proposición 3.6.1](#), se tiene que para cada vecindad U de e_G en G , $\varphi(U)$ es una vecindad de $\widehat{e}$. Ahora sea $\widehat{V}$ una vecindad de $\widehat{e}$ en G/H . Entonces $\varphi^{-1}(\widehat{V})$ es una vecindad de e_G , así existe $U \in \mathcal{F}$ tal que $U \subseteq \varphi^{-1}(\widehat{V})$, luego $\varphi(U) \subseteq \widehat{V}$. ■

Sabemos que si H es un subgrupo de un grupo G tal que $gHg^{-1} \subseteq H$ para cada $g \in G$, H es normal, esto implica que G/H tiene una estructura natural de grupo que hereda de G/H , a saber, $(aH)(bH) := (ab)H$. En este caso decimos que G/H es el **grupo cociente**. El elemento $H = e_GH = \varphi(e_G)$ es el elemento neutro de G/H , y para cada $\widehat{x} = xH \in G/H$, se cumple que $(\widehat{x})^{-1} = (xH)^{-1} = H^{-1}x^{-1} = Hx^{-1} = x^{-1}H = \widehat{x}^{-1}$.

Teorema 3.6.2. Sea G un grupo (semi)topológico y H un subgrupo normal de G . Entonces

- (i) La función canónica $\varphi : G \rightarrow G/H$ es continua y un homomorfismo abierto.
- (ii) G/H dotado de la topología cociente es un grupo (semi)topológico.
- (iii) Sea G un grupo topológico. Entonces G/H es un grupo topológico si y sólo si H es cerrado.

DEMOSTRACIÓN: i) Se sigue de la [Proposición 3.6.1](#) que φ es continua y que φ es un homomorfismo es consecuencia directa de las operaciones definidas en G/H .

ii) Si G es un grupo topológico, entonces tenemos lo siguiente: $\bar{*}_{G/H}(xH, yH) = (xy^{-1})H$ es la operación en G/H .

$$\begin{array}{ccc}
 G \times G & \xrightarrow{\bar{*}_G} & G \\
 \downarrow \varphi \times \varphi & \searrow \varphi \circ \bar{*}_G & \downarrow \varphi \\
 G/H \times G/H & \xrightarrow{\bar{*}_{G/H}} & G/H
 \end{array}$$

$\bar{*}_{G/H} \circ \varphi \times \varphi$

No es difícil ver que el diagrama de arriba es conmutativo, y dado que las funciones φ y $\bar{*}_G$ son continuas, entonces también lo es $\varphi \circ \bar{*}_G = \bar{*}_{G/H} \circ \varphi \times \varphi$. De esta manera, como $\varphi \times \varphi$ es una identificación, entonces del [Teorema 1.1.10.1](#), se sigue que la función $\bar{*}_{G/H}$ es continua. Con argumentos similares se prueba la conclusión para un grupo semi-topológico.

Para iii), por el [Teorema 3.4.1.4](#) y la [Proposición 3.4.1](#) basta ver que G/H si y sólo si H es cerrado, pero esto es la [Proposición 3.6.3](#). ■

Proposición 3.6.4. Sean G un grupo topológico y $H \leq G$. Si G/H y H son conexos, entonces G es conexo.

DEMOSTRACIÓN: Sea $f : G \rightarrow \{0, 1\}$ una función continua. Ya que H es conexo, entonces f es constante en las clases laterales de G módulo H , así por el [Teorema 1.1.10.2](#) se tiene la continuidad de la función $\hat{f} : G/H \rightarrow \{0, 1\}$. Y como G/H es conexo, $\hat{f}$ es constante y de esto se deduce que f es constante. ■

Dado que todos los grupos (semi)topológicos son espacios homogéneos, se tiene que un grupo (semi)topológico es totalmente desconexo si y sólo si alguna componente es un conjunto unipuntual.

Proposición 3.6.5. Sea G un grupo (semi)topológico y C la componente conexa de e_G . Entonces G/C es un grupo (semi)topológico T_1 totalmente desconexo.

DEMOSTRACIÓN: Por la [Proposición 3.5.8](#) se tiene que C es un subgrupo normal cerrado de G . Así, por la [Proposición 3.6.3](#) se tiene que G/C es T_1 . Sólo resta probar que G/C es totalmente desconexo. Sea $\widehat{U}$ la componente conexa de $\widehat{e}$ en G/C . Note que las fibras de φ son conexas, pues si $y \in G$, entonces $\varphi^{-1}(yC) = yC$ y este último se sabe que es conexo. Así, dado que $\widehat{U}$ es un conexo cerrado, entonces por la [Proposición 1.1.10.1](#), $\varphi^{-1}(\widehat{U})$ es un conexo que contiene a C y a e , y como C es maximal con respecto a los conexos que contienen a e , entonces $\varphi^{-1}(\widehat{U}) = C$; esto es, $\widehat{U} = \{C\} = \{\widehat{e}\}$. ■

Proposición 3.6.6. Si G es un grupo topológico, H un subgrupo normal de G y M cualquier subgrupo de G , entonces $\varphi(M)$ es un subgrupo topológico de G/H , homeomorfo a MH/H .

DEMOSTRACIÓN: Claramente MH es un subgrupo de G , y $H \subseteq MH$, dado que H es un subgrupo normal de G , entonces H es un subgrupo normal de MH . La teoría general de grupos nos dice que la siguiente función es un isomorfismo, $\psi : \varphi(M) \rightarrow MH/H$ dada por $\psi(mH) = mH$. Solo falta probar que ψ es un homeomorfismo. Primero veamos que ψ es continua. Notemos que $\widehat{A}$ un subconjunto de G/H es abierto en MH/H si y sólo si existe un abierto U en G tal que $\widehat{A} = \varphi(U \cap MH)$. De aquí, usando que H es normal y φ es un homomorfismo, se tiene

$$\widehat{A} = \{xH : x \in U \cap MH\} = \{xH : x \in U\} \cap \{xH : x \in MH\} = \varphi(U) \cap \varphi(M).$$

Como U es abierto en G , se tiene que $\widehat{A}$ es abierto en $\varphi(M)$. Ahora veamos que ψ es abierta, para esto, sea $\widehat{B}$ un abierto en $\varphi(M)$, así existe U un abierto de G tal que $\widehat{B} = \varphi(M) \cap \varphi(U)$. Entonces como vimos arriba, se tiene $\psi(\widehat{B}) = B = \varphi(U \cap MH)$. Por lo tanto, ψ es un homeomorfismo. ■

En general se sabe que si G es un grupo, H es un subgrupo normal de G y M es cualquier subgrupo de G , entonces MH/H y $M/(M \cap H)$ son isomorfos. Sin embargo, en general para grupos topológicos no se cumple que estos cocientes sean homeomorfos. Por ejemplo, considere $(\mathbb{R}, +)$ con la topología usual, $\alpha \in \mathbb{R}$ un irracional, $H = \mathbb{Z}$ y $M = \alpha\mathbb{Z}$, entonces $H \cap M = \{0\}$ y $M + H$ es denso en $\mathbb{R}$. Entonces se puede comprobar que $(M + H)/H$ es compacto y que $M/\{0\}$

es discreto e infinito, y por tanto no pueden ser homeomorfos. A pesar de eso se cumple lo siguiente.

Proposición 3.6.7. Sean G un grupo topológico, H un subgrupo normal de G y M cualquier subgrupo de G . Entonces la función $f : MH/H \rightarrow M/(M \cap H)$ dada por $f(mH) = m(M \cap H)$, es abierta.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\varphi_0 : G \rightarrow G/(M \cap H)$ la función canónica. Note que $\widehat{V}$ un subconjunto de $G/(M \cap H)$ es un abierto en $M/(M \cap H)$ si y sólo si existe V un abierto en G tal que $\widehat{V} = \varphi_0(V \cap M) = V \cap M/(M \cap H)$. Mostraremos que f es una función abierta. Sea $\widehat{U}$ un abierto en MH/H . Entonces existe U un abierto en G tal que $\widehat{U} = \varphi(U \cap MH)$. Usando el que H es normal, se tiene

$$f(\widehat{U}) = f(\varphi(U \cap MH)) = \varphi_0(U \cap M).$$

Por lo tanto, f es una función abierta. ■

Proposición 3.6.8. Sean G un grupo topológico, H y M dos subgrupos normales de G tales que $H \subseteq M$. Entonces G/M es homeomorfo con $(G/H)/(M/H)$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\sigma : G/H \rightarrow G/M$ dado por $\sigma(xH) = xM$. Es fácil ver que σ está bien definida y que es un epimorfismo con $\ker \sigma = M/H$. Consideremos $\varphi : G \rightarrow G/M$ y $\rho : G \rightarrow G/H$ las funciones canónicas, entonces el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & G/M \\ \rho \downarrow & & \downarrow Id_{G/M} \\ G/H & \xrightarrow{\sigma} & G/M \end{array}$$

Dado que ρ es una identificación y la composición $\sigma \circ \rho = Id_{G/M} \circ \varphi$ es continua, entonces por el [Teorema 1.1.10.1](#), σ es continua. Ahora, para mostrar que σ es abierta. Sea $\rho(U)$ un abierto en G/H donde U es un abierto en G . Note que $\sigma(\rho(U)) = \varphi(U)$. De este modo, σ es abierta, y por tanto es una identificación. Luego por el Primer Teorema de Isomorfismo se tiene que existe un isomorfismo $\psi : (G/H)/(M/H) \rightarrow G/M$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 G/H & \xrightarrow{\sigma} & G/M \\
 \downarrow \pi & \nearrow \psi & \\
 (G/H)/(M/H) & &
 \end{array}$$

donde π es la función canónica. Luego, es fácil ver que σ es constante en las fibras de π y que π es constante en las fibras de σ . Así, por el [Teorema 1.1.10.2](#), se tiene que ψ es un homeomorfismo. ■

En general, la función canónica $\varphi : G \rightarrow G/H$ no es cerrada. Por ejemplo, considere $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ considerando a $\mathbb{R}$ con la suma y topología usual, φ no es cerrada, pues manda al cerrado $\{n + \frac{1}{2^n} : n \geq 1\}$ al conjunto $\{\frac{1}{2^n} + \mathbb{Z} : n \geq 1\}$ el cual no es cerrado en $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Proposición 3.6.9. Sean G un grupo topológico y H un subgrupo cerrado y compacto de G , entonces la función canónica $\varphi : G \rightarrow G/H$ es cerrada.

DEMOSTRACIÓN: Sea C un cerrado de G y $\hat{x} = xH \in G/H \setminus \varphi(C)$ de aquí $x \notin CH$. Ya que C es cerrado y H compacto, se tiene por el [Teorema 3.1.2](#) que CH es cerrado en G . Por tanto, existe $U \subseteq G$ un abierto tal que $x \in U \subseteq G \setminus CH$. Como φ es abierta, se tiene que $\varphi(U)$ es un conjunto abierto que contiene a xH y es tal que $\varphi(U) \subseteq G/H \setminus \varphi(C)$. Por lo tanto, $G/H \setminus \varphi(C)$ es abierto en G/H . Así, $\varphi(C)$ es cerrado en G/H . ■

Proposición 3.6.10. Sean G y H grupos topológicos tal que H es totalmente disconexo. Si $f : G \rightarrow H$ es un homomorfismo continuo y C es la componente conexa de e_G , entonces existe un homomorfismo continuo $\psi : G/C \rightarrow H$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{f} & H \\
 \downarrow \rho & \nearrow \psi & \\
 G/C & &
 \end{array}$$

($\rho : G \longrightarrow G/C$ es la función canónica)

DEMOSTRACIÓN: Primero veamos que f es constante en las fibras de ρ , sea $gC \in G/C$, entonces $\rho^{-1}(\{gC\}) = gC$. Así, $f(\rho^{-1}(gC)) = f(gC)$ y dado que f es continua, se debe tener que $f(gC)$ es conexo pero el hecho de que H es totalmente desconexo, implica que $f(gC)$ es un conjunto unipuntual; esto es, f es constante en las fibras de ρ . Así, por el [Teorema 1.1.10.2](#), se tiene que la función $\psi = f \circ \rho^{-1} : G/C \rightarrow H$ es continua y hace conmutar al diagrama anterior. Resta probar que ψ es un homomorfismo, para esto, sean $a, b \in G$, entonces usando que f es un homomorfismo, se tiene

$$\psi(aCbC) = \psi(abC) = f(ab) = f(a)f(b) = \psi(aC)\psi(bC)$$

Lo que implica que ψ es un homomorfismo. ■

Bajo argumentos semejantes se puede probar el siguiente resultado más general.

Proposición 3.6.11. Sean G y H grupos topológicos con H totalmente desconexo. Si $f : G \longrightarrow H$ un homomorfismo continuo y K es un subgrupo normal y conexo de G , entonces existe un homomorfismo continuo $\psi : G/K \longrightarrow H$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ \rho \downarrow & \nearrow \psi & \\ G/K & & \end{array}$$

Proposición 3.6.12. Sea G un grupo topológico. Entonces

- i) $G/\overline{\{e_G\}}$ es un grupo topológico Hausdorff.
- ii) Si H es cualquier grupo topológico Hausdorff y $f : G \rightarrow H$ es un homomorfismo continuo, entonces existe un homomorfismo continuo $\psi : G/\overline{\{e_G\}} \rightarrow H$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{f} & H \\
 \rho \downarrow & \nearrow \psi & \\
 G/\overline{\{e_G\}} & &
 \end{array}$$

donde $\rho : G \rightarrow G/\overline{\{e_G\}}$ es la función canónica.

DEMOSTRACIÓN:

- i) Se sigue de [Proposición 3.6.3](#) y la [Proposición 3.5.1](#).
- ii) Haciendo $K = \overline{\{e_G\}}$. Definimos $\psi : G/K \rightarrow H$ dada por $\psi(gK) = f(g)$. Primero mostraremos que ψ está bien definida. Sean $g_1, g_2 \in G$ tales que $g_1K = g_2K$, esto implica que $g_1g_2^{-1} \in K$. Sea U un abierto que contiene a e_H , por la continuidad de f , existe un abierto W que contiene a e_G tal que $f(W) \subseteq U$, luego por la [Proposición 3.3.3](#) se tiene que $g_1g_2^{-1} \in W$. Así, $f(g_1g_2^{-1}) \in U$. Como U fue un abierto arbitrario tal que $e_H \in U$, se sigue de la [Proposición 3.4.1](#) que $f(g_1g_2^{-1}) = e_H$. Así, $f(g_1) = f(g_2)$. La continuidad de f se sigue del [Teorema 1.1.10.2](#).

■

3.7 G -espacios

Definición. Sean G un grupo topológico y X un espacio topológico con X un G -conjunto, con acción θ . Se dice que (G, X, θ) es un **grupo topológico de transformaciones** si θ es una función continua. En este caso, se dice que X es un G -espacio.

Proposición 3.7.1. Sea (G, X, θ) un grupo topológico de transformaciones y $g \in G$. La función $\theta_g : X \rightarrow X$ dada por $\theta_g(x) = g.x$ es un homeomorfismo.

DEMOSTRACIÓN: Solo basta notar que $\theta_g = \theta|_{\{g\} \times X} \circ \text{Homeo}(X, g)$ y que la inversa de θ_g es $\theta_{g^{-1}}$. ■

Proposición 3.7.2. Sea X un G -espacio con acción θ . La relación $\sim_\theta$ es una relación abierta.

DEMOSTRACIÓN: Sea U un abierto de X . Entonces

$$\sim_\theta(U) = \{x \in X : \exists u \in U \text{ y } g \in G, x = g.u\} = \bigcup_{g \in G} g.U$$

Por la proposición anterior, cada $g.U$ es abierto, por lo que $\sim_\theta(U)$ es un conjunto abierto. ■

Definición. Sean X un G -espacio y Y un H -espacio. Un **morfismo de G -espacios** de (G, X) sobre (H, Y) es un par (f, g) donde $f : G \rightarrow H$ es un homomorfismo continuo y $g : X \rightarrow Y$ es una función continua tales que para cada $u \in G$ y $x \in X$ se cumple:

$$g(u.x) = f(u).g(x)$$

En este caso, se dirá que f y g son **compatibles**.

El siguiente resultado es un caso particular de [3, VI, 3, Teorema 4.3]

Proposición 3.7.3. Sean X un G -espacio y Y un H -espacio y (f, g) es un morfismo entre (G, X) y (H, Y) . Entonces la función $\varphi : X/G \rightarrow Y/H$ dada por $\varphi(G.x) = G.g(x)$ es continua.

3.8 Productos y límites inversos de grupos topológicos

En esta sección consideraremos para una familia $\mathcal{F} = \{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de grupos topológico su producto directo de grupos topológicos con la topología producto y a la suma directa la consideraremos con la topología de subespacio inducida por el producto.

El siguiente resultado es un caso particular de [3, IV, 1.2, (3)]

Proposición 3.8.1. Si $\mathcal{F} = \{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia de grupos topológicos, entonces $\bigoplus_{\alpha \in I} G_\alpha$ es un subgrupo denso de $\prod_{\alpha \in I} G_\alpha$.

El siguiente resultado se sigue de algunas teoremas conocidos de la topología general.

Proposición 3.8.2. Si $\mathcal{F} = \{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia de grupos topológicos. Entonces

- i) $\prod_{\alpha \in I} G_\alpha$ es localmente compacto si y sólo si G_α es localmente compacto $\forall \alpha \in I$ y G_α es compacto, para todo $\alpha \in I$ salvo para una cantidad finita.
- ii) $\bigoplus_{\alpha \in I} G_\alpha$ es de Hausdorff localmente compacto si y sólo si G_α es localmente compacto de Hausdorff $\forall \alpha \in I$ y $G_\alpha = \{e_{G_\alpha}\}$ para todo $\alpha \in I$, salvo para una cantidad finita.

Ejemplos. El conjunto de números irracionales y el conjunto de Cantor admiten la estructura de grupo topológico, considerados ambos con la topología de subespacio inducida por $\mathbb{R}$.

Para continuar con algunos resultados necesitaremos la siguiente definición de teoría de grupos y algunos resultados relacionados con el concepto.

Definición. Sea G un grupo, decimos que G es **divisible** si para cada $x \in G$ y $n \in \mathbb{N}$, existe $y \in G$ tal que $y^n = x$.

Ejemplo. $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ son ejemplos de grupos divisibles aditivos y $\mathbb{Z}$ no es divisible.

Proposición 3.8.3. Sean G un grupo abeliano y $H \leq G$. Si $\psi : H \rightarrow D$ es un homomorfismo en un grupo divisible D , entonces ψ se puede extender a un homomorfismo φ de G en D .

DEMOSTRACIÓN:

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & H & \hookrightarrow & G \\
 & & \downarrow \psi & \nearrow & \\
 & & D & &
 \end{array}$$

Usaremos el Lema de Zorn para encontrar la extensión de ψ en G . Consideremos la siguiente familia

$$\mathfrak{F} = \{f : H_1 \rightarrow D : H \subseteq H_1 \leq G, f \text{ es homomorfismo y } \text{Graf } \psi \subseteq \text{Graf } f\}$$

Note que $\mathfrak{F} \neq \emptyset$, pues $\psi \in \mathfrak{F}$. Ordenamos a $\mathfrak{F}$ por extensión; esto es, si $f : H_1 \rightarrow D, g : H_2 \rightarrow D \in \mathfrak{F}$, definimos $f \ll g$ si y sólo si $\text{Graf } f \subseteq \text{Graf } g$. Ahora, sea $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{F}$ una $\ll$ -cadena no vacía, digamos que $\mathcal{C} = \{f_\alpha : H_\alpha \rightarrow D\}_{\alpha \in I}$. Entonces definimos $F : \bigcup_{\alpha \in I} H_\alpha \rightarrow D$ dada por $F(x) = f_\alpha(x)$ si $x \in H_\alpha$. Es fácil ver que F está bien definida, que es un homomorfismo y por su definición cumple que $f_\alpha \ll F$ para cada $\alpha \in I$; esto implica que F es una cota superior de $\mathcal{C}$ en $(\mathfrak{F}, \ll)$. Así, por el Lema de Zorn, podemos disponer de un elemento $\ll$ -maximal en $\mathfrak{F}$, digamos $\varphi : K \rightarrow D$. Mostraremos que $K = G$. De otra manera, si $K \subsetneq G$, sea $x \in G \setminus K$. Consideremos el siguiente subgrupo de G .

$$K_0 = \{x^n h : h \in K, n \in \mathbb{Z}\}$$

Note que $K \subsetneq K_0$, pues $x \in K_0$. Ahora, tenemos dos casos:

- (i) Si $x^n \notin K$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces definimos una función $\theta : K_0 \rightarrow D$ dada por $\theta(x^n h) = \varphi(h)$. Claramente θ está bien definida y es un homomorfismo que extiende a φ .
- (ii) Si $x^n \in K$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Sea $k = \min\{n \in \mathbb{N}_{\geq 2} : x^n \in K\}$. Entonces $\varphi(x^k) = d \in D$. Como D es divisible, hay un $z \in D$ tal que $z^k = d$. Definimos una función $\theta : K_0 \rightarrow D$ dada por $\theta(x^n h) = \varphi(h)z^n$. Claramente esta función está bien definida y es un homomorfismo que extiende φ .

Los dos anteriores casos contradicen la elección de φ . Por lo que $K = G$. Esto es, $\varphi : G \rightarrow D$ es un homomorfismo que extiende a ψ . ■

Corolario 3.8.1. Si G es un grupo abeliano, entonces para todo $g, h \in G$, con $g \neq h$, existe un homomorfismo $\varphi : G \rightarrow \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$ tal que $\varphi(g) \neq \varphi(h)$; esto es que, φ separa puntos de G .

DEMOSTRACIÓN: Es suficiente probar que para $g \in G$ con $g \neq e_G$, existe un homomorfismo $\varphi : G \rightarrow T$ tal que $\varphi(g) \neq e := 1 + 0i$. Para la prueba nos auxiliaremos del siguiente conjunto, $H = \langle g \rangle$. De aquí podemos considerar dos casos:

- i) Si para algún $n \in \mathbb{N}$, $g^n = e_G$, y $g^k \neq e_G$ para $0 < k < n$. Definimos la función $\varphi : H \rightarrow T$ como $\varphi(g) :=$ una n -ésima raíz de la unidad $= r$ (con

$r \neq e$), y $\varphi(g^m) = r^m$ para cada $m \in \mathbb{Z}$. Usando la [Proposición 3.8.3](#), podemos extender φ a un homomorfismo en G .

- ii) Si $g^n \neq e_G$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definimos que $\varphi(g^m) = z^m$ para algún $z \in T$ con $z \neq e$. Luego por la [Proposición 3.8.3](#), extendemos a φ a G .

■

Proposición 3.8.4. Sea G un grupo topológico abeliano y H un subgrupo abierto divisible de G , entonces G es topológicamente isomorfo a $H \times G/H$.

DEMOSTRACIÓN: Como H es abierto, entonces por la [Proposición 3.6.3](#), G/H es discreto. Como H es divisible, entonces el homomorfismo identidad $Id_H : H \rightarrow H$ se puede extender a un homomorfismo ψ en G , esto es que $\psi \circ i = Id_H$ donde $i : H \hookrightarrow G$ es la inclusión.

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & H & \xhookrightarrow{i} & G \\
 & & \downarrow Id_H & \searrow \psi & \\
 & & H & &
 \end{array}$$

Primero mostremos que $G = H \oplus \ker \psi$ (donde aquí $\oplus$, es la suma *directa interna*; esto es, $H \cap \ker \psi = \{0\}$ y $G = H + \ker \psi$). Sea $x \in G$, entonces

$$x = (x - \psi(x)) + \psi(x).$$

Note que $x - \psi(x) \in \ker \psi$, pues $\psi(x - \psi(x)) = \psi(x) - \psi(\psi(x)) = \psi(x) - \psi(x) = 0$. Así $G = H + \ker \psi$. Ahora, si $g \in H \cap \ker \psi$, entonces

$$g = \psi(i(g)) = \psi(g) = 0.$$

Esto prueba que $H \cap \ker \psi = \{0\}$. Ahora, con esta notación definimos $\Gamma : G \rightarrow H \times G/H$ dada por $\Gamma(h + k) = (h, k + H)$, con $h \in H$ y $k \in \ker \psi$. Ahora veamos que Γ es un isomorfismo de grupos. Probemos primero que Γ es inyectiva. Sean $g = h + k, g = h' + k' \in G$ tal que $(h, k + H) = (h', k' + H)$, así $h = h'$ y $k - k' \in H$ pero así $k - k' \in \ker \psi \cap H = \{0\}$, así $k = k'$. Ahora

veamos que Γ es suprayectiva. Sea $(h, g + H)$, sabemos que existen únicos $h' \in H$ y $k' \in \ker \psi$ tales $g = h' + k'$, por lo que $g - k' \in H$, $g + H = k' + H$. Así, $(h, g + H) = \Gamma(h + k')$. Ahora bien para mostrar que Γ es homeomorfismo, solo hay que notar que $\Gamma := Id_H \oplus \pi|_{\ker \psi}$ ² (donde $\pi : G \rightarrow G/H$ es la función canónica) esto implica Γ es homeomorfismo pues las funciones Id_H y $\pi|_{\ker \psi}$ son homeomorfismos. ■

Observación 3.8.1. Es natural preguntarse lo siguiente. Dado un grupo G , ¿habrá una topología en G que lo haga un espacio Hausdorff y un grupo topológico a la vez?, la respuesta a esta pregunta es sencilla, la topología discreta. ¿Admitirá una topología Hausdorff no discreta? La respuesta es afirmativa para grupo abelianos infinitos, como lo dice el siguiente resultado.

Teorema 3.8.1. Si G es un grupo abeliano infinito, entonces G admite una topología no discreta Hausdorff que lo hace grupo topológico.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{\psi_i : G \rightarrow T_i : i \in I\}$ la familia de los distintos homomorfismos de G en $T_i := \mathbb{S}^1$. Sea $H = \prod_{i \in I} T_i$. Definimos $F : G \rightarrow H$ dada por $F(g) = \{\psi_i(g)\}_{i \in I}$. Note que F es un homomorfismo, pues cada ψ_i es un homomorfismo. Por el Corolario 3.8.1, se tiene que F es inyectiva. Así G es isomorfo a $F(G)$. Dado que H es un espacio de Hausdorff, $F(G)$ también lo es, con la topología inducida por H . Resta probar que $F(G)$ no es discreto. Supongamos que si lo es, entonces por la Proposición 3.5.12, se tendría que $F(G)$ es cerrado en H . Luego como cada T_i es compacto, entonces por el Teorema de Tychonoff, H es compacto, y por tanto $F(G)$ sería un espacio compacto discreto e infinito, lo cual es una contradicción, pues un espacio compacto y discreto es finito. Por lo tanto, $F(G)$ no es discreto. ■

Definición. Un grupo G se dice **libre de torsión** si para cada $g \in G \setminus \{e_G\}$ y cada $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, se tiene que $g^n \neq e_G$.

Proposición 3.8.5. Si G es un grupo abeliano libre de torsión. Si $g, h \in G$ con $g \neq h$, entonces existe un homomorfismo $\psi : G \rightarrow (\mathbb{R}, +)$ tal que $\psi(g) \neq \psi(h)$.

DEMOSTRACIÓN: Sean $g, h \in G$ con $g \neq h$. Consideremos tres casos:

En los dos primeros casos estaremos suponiendo que $g, h \neq e_G$

²Aquí se está abusando de la notación, pero esto es válido pues en el caso finito $H \oplus \ker \psi \cong H \times \ker \psi$

Caso 1. Si existen $r, s \in \mathbb{N}$ tales que $rh = sg$, entonces $r \neq s$. Ahora definimos $\psi : \langle h \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\psi(nh) = n$ donde $n \in \mathbb{Z}$. Primero veamos ψ que está bien definido; esto es, si $m, n \in \mathbb{N}$ es tal que $nh = mh$, entonces $(n - m)g = e_G$ esto implica que $n = m$ pues $g \neq e_G$ y G es libre de torsión. Y así $\psi(nh) = \psi(mh)$. Es fácil ver que ψ es un homomorfismo. Por otro lado, dado que $\mathbb{R}$ es divisible, por la [Proposición 3.8.3](#) podemos extender ψ a un homomorfismo de G en $\mathbb{R}$ digamos $\widehat{\psi}$. Ahora note que

$$\begin{aligned} s\widehat{\psi}(g) &= \widehat{\psi}(sg) \\ &= \widehat{\psi}(rh) \\ &= \psi(rh) \\ &= r. \end{aligned}$$

Esto implica que $\widehat{\varphi}(g) = \frac{r}{s} \neq 1 = \widehat{\psi}(h)$.

Caso 2. Supongamos ahora que $rh \neq sg$ para todo $r, s \in \mathbb{N}^+$. Definimos $\psi : \langle h, g \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\psi(nh + mg) = n + 2m$ donde $n, m \in \mathbb{Z}$. Veamos ψ está bien definido. Sean $n, m, n', m' \in \mathbb{Z}$ tales que $ng + mh = n'g + m'h$, entonces $(n - n')g = (m' - m)h$, por la suposición inicial se tendría que $n - n' = m' - m = 0$ es decir que $n = n'$ y $m = m'$. Así, $\psi(ng + mh) = \psi(n'g + m'h)$. Es fácil probar que ψ es un homomorfismo, y además es tal que $\psi(h) = 1 \neq 2 = \psi(g)$. Usando la [Proposición 3.8.3](#), podemos extender a ψ a un homomorfismo de G en $\mathbb{R}$.

Caso 3. Ahora sea $h = e_G$ ó $g = e_G$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $h = e_G$. Definamos $\varphi : \langle g \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\varphi(ng) = n$. Usando argumentos similares a los casos anteriores se puede ver que φ está bien definida y que es un homomorfismo. Ahora note que $\varphi(g) = 1 \neq 0 = \varphi(e_G) = \varphi(h)$. De nuevo usando la [Proposición 3.8.3](#), podemos extender φ a un homomorfismo de G en $\mathbb{R}$.

■

Es fácil probar las siguientes proposiciones.

Proposición 3.8.6. Sea $(G_\alpha, f_\alpha^\beta, I)$ un sistema inverso donde cada G_α es un grupo topológico y cada f_α^β es un homomorfismo continuo. Entonces

$$\varprojlim \{G_\alpha, f_\alpha^\beta, I\} \leq \prod_{\alpha \in I} G_\alpha.$$

A un sistema inverso como en la proposición anterior lo llamaremos **sistema inverso de grupos**.

Proposición 3.8.7. Sea $(G_\alpha, f_\alpha^\beta, I)$ un sistema inverso de grupos. Si para cada $\alpha \in I$, $H_\alpha \leq G_\alpha$ con la condición de que $f_\alpha^\beta(H_\beta) \subseteq H_\alpha$ siempre que $\alpha, \beta \in I$ sean tales que $\alpha \preceq \beta$. Entonces $\mathbf{H} = \varprojlim \{H_\alpha, f_\alpha^\beta|_{H_\beta}, I\} \leq \mathbf{G} = \varprojlim \{G_\alpha\}$. Más aún, si cada H_α es normal, entonces $\mathbf{H}$ es un subgrupo normal de $\mathbf{G}$.

Proposición 3.8.8. Sean $(X_\alpha, g_\alpha^\beta, I)$ un sistema inverso y $(G_\alpha, f_\alpha^\beta, I)$ un sistema inverso de grupos donde cada X_α es un G_α -espacio con acción θ_α . Si para cada $\alpha, \beta \in I$ con $\alpha \preceq \beta$, se tiene que $(f_\alpha^\beta, g_\alpha^\beta)$ es un morfismo de (G_β, X_β) sobre (G_α, X_α) . Entonces

- i) $\mathbf{X} = \varprojlim \{X_\alpha, g_\alpha^\beta\}$ es un $\mathbf{G} = \varprojlim \{G_\alpha, f_\alpha^\beta\}$ -espacio.
- ii) Las funciones f_α^β y g_α^β definen funciones continuas $\varphi_\alpha^\beta : X_\beta/G_\beta \rightarrow X_\alpha/G_\alpha$ tal que $\{X_\alpha/G_\alpha, \varphi_\alpha^\beta, I\}$ es un sistema inverso.
- iii) Si para cada $\alpha \in I$, $\pi_\alpha : \mathbf{X} \rightarrow X_\alpha$ y $\xi_\alpha : \mathbf{G} \rightarrow G_\alpha$ son las funciones canónicas, entonces cada (π_α, ξ_α) es un morfismo de $(\mathbf{G}, \mathbf{X})$ sobre (G_α, X_α) y estos definen $\{h_\alpha : \mathbf{X}/\mathbf{G} \rightarrow X_\alpha/G_\alpha\}$ un morfismo de límites inversos de $\varprojlim \{\mathbf{X}/\mathbf{G}, Id_{\mathbf{X}/\mathbf{G}}\}$ y $\varprojlim \{X_\alpha/G_\alpha, \varphi_\alpha^\beta\}$.

DEMOSTRACIÓN: i) Definimos $\theta : \mathbf{G} \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ dada por $\theta(\mathbf{g}, \mathbf{x}) = \{\mathbf{g}(\alpha) \cdot \mathbf{x}(\alpha)\}_{\alpha \in I}$. Primero verifiquemos que θ está bien definida. Sean $\alpha, \beta \in I$ tales que $\alpha \preceq \beta$, $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$ y $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$. Veremos que $\theta(\mathbf{g}, \mathbf{x}) \in \mathbf{X}$,

$$\begin{aligned} g_\alpha^\beta(\mathbf{g}(\beta) \cdot \mathbf{x}(\beta)) &= f_\alpha^\beta(\mathbf{g}(\beta)) \cdot g_\alpha^\beta(\mathbf{x}(\beta)) \\ &= \mathbf{g}(\alpha) \cdot \mathbf{x}(\alpha). \end{aligned}$$

Ahora, probaremos la continuidad de θ . Por el [Teorema 1.1.3.2](#), hay probar que cada $\pi_\alpha \circ \theta$ es continua y para ello es suficiente con mostrar que el diagrama de abajo es conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{G} \times \mathbf{X} & \xrightarrow{\theta} & \mathbf{X} \\
 \downarrow \xi_\alpha \times \pi_\alpha & & \downarrow \pi_\alpha \\
 G_\alpha \times X_\alpha & \xrightarrow{\theta_\alpha} & X_\alpha
 \end{array}$$

Sean $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$ y $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, entonces

$$\begin{aligned}
 (\pi_\alpha \circ \theta)(\mathbf{g}, \mathbf{x}) &= \pi_\alpha(\theta(\mathbf{g}, \mathbf{x})) \\
 &= \theta_\alpha(\mathbf{g}(\alpha), \mathbf{x}(\alpha)) \\
 &= \theta_\alpha(\xi_\alpha(\mathbf{g}), \pi_\alpha(\mathbf{x})) \\
 &= \theta_\alpha((\xi_\alpha \times \pi_\alpha)(\mathbf{g}, \mathbf{x})) \\
 &= (\theta_\alpha \circ (\xi_\alpha \times \pi_\alpha))(\mathbf{g}, \mathbf{x}).
 \end{aligned}$$

ii) Para cada $\alpha, \beta \in I$ tales que $\alpha \preceq \beta$, definimos $\varphi_\alpha^\beta : X_\beta/G_\beta \rightarrow X_\alpha/G_\alpha$ dado por $\varphi_\alpha^\beta(G_\beta.x) = G_\alpha.g_\alpha^\beta(x)$. La continuidad de cada φ_α^β se sigue de la [Proposición 3.7.3](#). Resta probar que $\{X_\alpha/G_\alpha, \varphi_\alpha^\beta\}$ es un sistema inverso. Sean $\alpha, \gamma, \beta \in I$ tales que $\alpha \preceq \gamma \preceq \beta$, hay que probar que $\varphi_\alpha^\beta = \varphi_\alpha^\gamma \circ \varphi_\gamma^\beta$. Sea $G_\beta.x_\beta \in X_\beta/G_\beta$, entonces

$$\begin{aligned}
 (\varphi_\alpha^\gamma \circ \varphi_\gamma^\beta)(G_\beta.x_\beta) &= \varphi_\alpha^\gamma(\varphi_\gamma^\beta(G_\beta.x_\beta)) \\
 &= \varphi_\alpha^\gamma(G_\gamma.g_\gamma^\beta(x_\beta)) \\
 &= G_\alpha.(g_\alpha^\gamma \circ g_\gamma^\beta)(x_\beta) \\
 &= G_\alpha.g_\alpha^\beta(x_\beta) \\
 &= \varphi_\alpha^\beta(G_\beta.x_\beta).
 \end{aligned}$$

iii) Primero veamos que cada (ξ_α, π_α) es un morfismo. Sean $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$ y $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, entonces

$$\pi_\alpha(\mathbf{g}.\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\alpha).\mathbf{x}(\alpha) = \xi_\alpha(\mathbf{g}).\pi_\alpha(\mathbf{x}).$$

La [Proposición 1.1.5.2](#) prueba que las funciones $h_\alpha : \mathbf{X}/\mathbf{G} \rightarrow X_\alpha/G_\alpha$ definidas de manera natural, definen un morfismo de límites inversos. ■

Proposición 3.8.9. Sean $(G_\alpha, f_\alpha^\beta, I)$ y $(K_\alpha, g_\alpha^\beta, I)$ sistemas inversos de grupos

y $\{u_\alpha : G_\alpha \rightarrow K_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un morfismo entre $\varprojlim \{G_\alpha\}$ y $\varprojlim \{K_\alpha\}$ donde cada u_α es un homomorfismo. Entonces

i) $u = \varprojlim u_\alpha : \varprojlim \{G_\alpha\} \rightarrow \varprojlim \{K_\alpha\}$ es un homomorfismo continuo con kernel $\varprojlim \{\ker u_\alpha\}$.

ii) $\varprojlim \{u_\alpha(G_\alpha), g_\alpha^\beta|_{u_\beta(G_\beta)}, I\} \leq \varprojlim \{K_\alpha\}$.

DEMOSTRACIÓN: i) La [Proposición 1.1.5.2](#) garantiza la continuidad de u . Es fácil ver que u es un homomorfismo. Para determinar el kernel de u , primero mostraremos que la familia $\{\ker u_\alpha\}$ cumple con las condiciones de la [Proposición 3.8.6](#). Sean $\alpha, \beta \in I$ con $\alpha \preceq \beta$ y $x \in \ker u_\beta$. Debido a que (u_α) es un morfismo de límites inversos, se tiene que $u_\alpha(f_\alpha^\beta(x)) = g_\alpha^\beta(u_\beta(x)) = g_\alpha^\beta(e) = e$, con esto $f_\alpha^\beta(x) \in \ker u_\alpha$. Así, $f_\alpha^\beta(\ker u_\beta) \subseteq \ker u_\alpha$ siempre que $\alpha \preceq \beta$. Por lo que, $\mathbf{H} = \varprojlim \{\ker u_\alpha\} \leq \varprojlim \{G_\alpha\}$. Resta probar que $\ker u = \mathbf{H}$. Sea $\mathbf{x} \in \ker u$, entonces para cada $\alpha \in I$, $u_\alpha(\mathbf{x}(\alpha)) = e$. Así, $\mathbf{x}(\alpha) \in \ker u_\alpha$ y ya que $\mathbf{x} \in \varprojlim \{G_\alpha\}$, entonces $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$. La otra contención es directa.

ii) Solo hay que probar que la familia $\{u_\alpha(G_\alpha)\}$ satisface las condiciones de la [Proposición 3.8.6](#). Sean $\alpha, \beta \in I$ tales que $\alpha \preceq \beta$ y $x \in u_\beta(G_\beta)$, entonces $x = u_\beta(g_\beta)$ para algún $g_\beta \in G_\beta$ y dado que $\{u_\alpha\}$ es un morfismo entre límites inversos, se tiene que $g_\alpha^\beta(x) = g_\alpha^\beta(u_\beta(g_\beta)) = u_\alpha(f_\alpha^\beta(g_\beta)) \in u_\alpha(G_\alpha)$, por lo que $g_\alpha^\beta(u_\beta(G_\beta)) \subseteq u_\alpha(G_\alpha)$. Así, se concluye que $\varprojlim \{u_\alpha(G_\alpha)\} \leq \varprojlim \{K_\alpha\}$. ■

En la proposición anterior inciso ii), no necesariamente se tiene que $\text{Im } u = \varprojlim \{u_\alpha(G_\alpha)\}$, como se mostrará con el siguiente ejemplo. Consideremos $p \in \mathbb{N}$ un número primo con $p > 2$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \mathbb{Z}$ y $G_n = p^n\mathbb{Z}$, y sea $\varphi_n^m : X_m \rightarrow X_n$ la función identidad y $\psi_n^m : G_m \rightarrow G_n$ la función inclusión siempre que $m \geq n$. Pongamos $\mathbf{X} = \varprojlim \{X_n, \varphi_n^m\}$ y $\mathbf{G} = \varprojlim \{G_n, \psi_n^m\}$. Note que $\mathbf{G} = \{0\}$. Sean $\pi_n : \mathbf{X} \rightarrow X_n$ y $\xi_n : \mathbf{G} \rightarrow G_n$ las funciones canónicas. Dotaremos a cada X_n y cada G_n con la topología discreta y así cada X_n es un G_n -espacio donde la acción es la traslación. Note que las funciones φ_n^m y ψ_n^m son compatibles, por lo que inducen $\{X_n/G_n, \theta_n^m\}$ un sistema inverso. Notemos que cada θ_n^m está dada por $\theta_n^m(xG_m) = xG_n$. Por la [Proposición 3.8.8](#), sabemos que cada (π_n, ξ_n) es un morfismo de $(\mathbf{G}, \mathbf{X})$ sobre (G_n, X_n) y este morfismo induce $\{h_n : \mathbf{X}/\mathbf{G} \rightarrow X_n/G_n\}$ un morfismo de límites inversos de $\varprojlim \{\mathbf{X}/\mathbf{G}, Id_{\mathbf{X}/\mathbf{G}}\}$ sobre $\varprojlim \{X_n/G_n, \theta_n^m\}$, y este morfismo induce una

función continua $\Gamma := \varprojlim h_n : \mathbf{X}/\mathbf{G} \rightarrow \varprojlim \{X_n/G_n, \theta_n^m\}$ dada por $\Gamma(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x}(n)G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Note que $\varprojlim \{h_n(\mathbf{X}/\mathbf{G}), \theta_n^m|_{h_m(\mathbf{X}/\mathbf{G})}\} = \varprojlim \{X_n/G_n, \theta_n^m\}$. Ahora, notemos que $X/G \cong_{\text{Iso}} \mathbb{Z}$, así podemos pensar que Γ está dada por $\Gamma(n) = \{nG_m\}_{m \in \mathbb{N}}$. Mostraremos que Γ no es suprayectiva. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $x_n = \frac{p^n - 1}{p - 1} = 1 + p + \dots + p^{n-1}$. Primero mostraremos que el elemento $\{x_n G_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \varprojlim \{X_n/G_n, \theta_n^m\}$. Sea $m \in \mathbb{N}$, entonces

$$\theta_m^{m+1}(x_{m+1}G_{m+1}) = (1 + p + \dots + p^m)G_m = (1 + p + \dots + p^{m-1})G_m = x_m G_m,$$

esto pues $p^m \in p^m \mathbb{Z}$. Finalmente, mostraremos que $\{x_n G_n\}_{n \in \mathbb{N}} \notin \text{Im } \Gamma$. Supongamos lo contrario, esto es, existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $aG_n = x_n G_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, así $a - x_n = p^n l_n$ para algún $l_n \in \mathbb{Z}$, entonces se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} a - x_n &= p^n l_n \\ a - \frac{p^n - 1}{p - 1} &= p^n l_n \\ a(p - 1) + 1 &= p^n(1 + (p - 1)l_n). \end{aligned}$$

Esto implica que $p^n | a(p - 1) + 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De esta manera, para que ocurra lo anterior es que $a(p - 1) + 1 = 0$, por lo que $a = \frac{1}{1 - p}$, lo que contradice la elección de a .

Proposición 3.8.10. Sean $\mathbf{G} = \varprojlim \{G_\alpha, \varphi_\alpha^\beta\}$ un límite inverso de un sistema inverso de grupos compactos y de Hausdorff y $\mathbf{L} \trianglelefteq \mathbf{G}$ abierto. Entonces $\ker \varphi_\alpha \subseteq L$ para alguna α , donde $\varphi_\alpha : \mathbf{G} \rightarrow G_\alpha$ es la función canónica. Por lo que $\mathbf{G}/\mathbf{L}$ es isomorfo continuo a un grupo cociente de algún subgrupo de G_α , y si además, cada función φ_α es suprayectiva isomorfo a un grupo cociente de algún G_α .

DEMOSTRACIÓN: Ya que L es abierto y contiene a $e_{\mathbf{G}}$, entonces por la [Proposición 1.1.5.3](#), existen $\alpha \in I$ y U_α un abierto en G_α tal que $e_{\mathbf{G}} \in \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \subseteq L$, así $\ker \varphi_\alpha \subseteq L$. De este modo, tenemos que

$$\mathbf{G}/\mathbf{L} \cong (G/\ker \varphi_\alpha)/(\mathbf{L}/\ker \varphi_\alpha),$$

y como $\mathbf{G}/\ker \varphi_\alpha \cong \varphi_\alpha$, se sigue que $\mathbf{G}/\mathbf{L}$ es isomorfo a un cociente de φ_i . ■

Proposición 3.8.11. Sean G un grupo topológico y $\mathcal{F}$ una base de filtro conformado por subgrupos normales cerrados, y para cada $K, L \in \mathcal{F}$, se define $K \preceq L$ si y sólo si $L \subseteq K$. Entonces $(I, \preceq)$ es un conjunto directo, y los epimorfismos $\varphi_L^K : G/L \rightarrow G/K$ definidos para $L \preceq K$, hacen de los grupos G/K un sistema inverso. Pongamos $\widehat{G} = \varprojlim \{G/K, \varphi_L^K, \mathcal{F}\}$ y para cada $K \in \mathcal{F}$, sea $\varphi_K : \widehat{G} \rightarrow G/K$ la función canónica. Existe un homomorfismo continuo $\theta : G \rightarrow \widehat{G}$ con $\ker \theta = \bigcap_{K \in \mathcal{F}} K$, con imagen densa en $\widehat{G}$ tal que $\varphi_K \circ \theta : G \rightarrow G/K$ es la función canónica para cada $K \in \mathcal{F}$. Si G es compacto, entonces θ es un epimorfismo. Si G es compacto y $\bigcap_{K \in \mathcal{F}} K = \{e\}$, entonces θ es un isomorfismo de grupos topológicos

DEMOSTRACIÓN: Definimos $\theta : G \rightarrow \widehat{G}$ de forma natural. Es fácil ver que θ está bien definida y que $\varphi_K \circ \theta$ es la función canónica, esto último implica que θ es continua. Ahora, $x \in \ker \theta$ si y sólo si $Kg = K$ para todo $K \in \mathcal{F}$ y esto ocurre si y sólo si $g \in \bigcap_{K \in \mathcal{F}} K$. Como $\varphi_K(\theta(G)) = G/K$, se tiene por la

Proposición 1.1.5.4 que $\theta(G)$ es denso en $\widehat{G}$.

Supongamos que G es compacto, entonces $\theta(G)$ es compacto. Por la **Teorema 3.6.2**, se tiene que cada G/K es de Hausdorff, así $\widehat{G}$ es de Hausdorff. Por lo que $\theta(G)$ es cerrado en $\widehat{G}$, y como $\theta(G)$ es denso en $\widehat{G}$, así $\theta(G) = \widehat{G}$. Si además, $\ker \theta = \{e\}$, entonces θ es una biyección continua y como es θ es una función cerrada, se tiene por el **Teorema 1.1.2.3** que θ es un homeomorfismo. ■

3.9 Grupos topológicos localmente compactos

Es fácil probar el siguiente resultado usando las traslaciones.

Proposición 3.9.1. Todo grupo topológico es localmente compacto si y sólo si existe una vecindad compacta de el neutro.

Teorema 3.9.1. Todo grupo topológico de Hausdorff localmente compacto es normal.

DEMOSTRACIÓN: Sea G un grupo topológico localmente compacto y de Hausdorff. Tomemos U una vecindad simétrica de e_G con $\overline{U}$ compacto, esto

es posible pues G es localmente compacto. Consideremos ahora $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$. Sabemos que este es un subgrupo de G abierto y cerrado, y debido al [Teorema 1.1.6.11](#), se tiene que H es localmente compacto. Luego por la [Proposición 3.3.3](#) se tiene que $\overline{U}^{n-1} \subseteq U^{n-1}U = U^n$ para $n \geq 1$. Así,

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{U}^i.$$

Dado que $\overline{U}^n$ es compacto pues $\overline{U}$ es compacto, se tiene así por la [Proposición 1.1.11.1](#) que H es un espacio normal. Por otra parte, considerando $G/H = \{aH : a \in G\}$. Y del hecho de que las traslaciones son homeomorfismos, se tiene que aH es normal para cada $a \in G$. Así, dado que $G = \bigcup_{a \in G} aH$, se tiene que G es normal por la [Proposición 1.1.11.2](#). ■

Lema 3.9.1. Sea G es un grupo topológico localmente compacto. Si K es subconjunto compacto de G y U es un subconjunto abierto de G tal que $K \subseteq U$, entonces existe una vecindad abierta V de e_G en G tal que $(KV) \cup (VK) \subseteq U$ y $\overline{(KV) \cup (VK)}$ es compacto.

DEMOSTRACIÓN: Por el [Lema 3.3.1](#), se tiene que existe V una vecindad abierta de e_G tal que $(KV) \cup (VK) \subseteq U$ y ya que G es localmente compacto, podemos suponer que V es compacto, de esta manera por el [Corolario 3.1.2](#) y el [Corolario 3.1.2](#) se tiene que $K\overline{V}$ es compacto y cerrado, y dado que $KV \subseteq K\overline{V}$, entonces $\overline{KV} \subseteq K\overline{V}$ y así $\overline{KV}$ es compacto. De forma análoga se tiene que $\overline{VK}$ es compacto. Por lo que $\overline{(KV) \cup (VK)} = \overline{KV} \cup \overline{VK}$ es compacto. ■

Lema 3.9.2. Sea G un grupo topológico, U una vecindad abierta de e_G y C un subconjunto compacto de G . Entonces existe un abierto V que contiene a e_G tal que $CVC^{-1} \subseteq U$.

DEMOSTRACIÓN: Por la [Proposición 3.3.2](#), existe W_1 una vecindad simétrica de e_G tal que $W_1^3 \subseteq U$, y existe una vecindad W_2 abierta y simétrica de e_2 tal que $aW_2a^{-1} \subseteq W_1$ para un $a \in G$ fijo. Ahora consideremos $W = W_1 \cap W_2$. Entonces para cada $x \in Wa$, tenemos que $xa^{-1} \in W \subseteq W_1$ y así $(xa^{-1})^{-1} = ax^{-1} \in W_1^{-1} = W_1$. Por lo que

$$xWx^{-1} \subseteq xW_2x^{-1} = (xa^{-1})aW_2a^{-1}(ax^{-1}) \subseteq W_1^3 \subseteq U$$

Con esto se sigue que para cada $a \in C$, existe un abierto simétrico W_a que contiene a e_G tal que $xW_ax^{-1} \subseteq U$ siempre que $x \in W_aa$. Así, la familia $\{W_aa : a \in C\}$ forma una cubierta abierta de C . Dado que C es compacto, entonces C es cubierto por una unión finita $\{W_{a_i}a_i : a_i \in C, i \in \{1, \dots, n\}\}$. Sea $V = \bigcap_{i=1}^n W_{a_i}$. Entonces V es un abierto simétrico que contiene a e_G . Ahora, para cada $x \in C$, existe un $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x \in W_{a_k}a_k$, lo que implica que $xW_{a_k}x^{-1} \subseteq U$. Por tanto

$$xVx^{-1} \subseteq xW_{a_k}x^{-1} \subseteq U.$$

■

Teorema 3.9.2. Sea G un grupo topológico localmente compacto y C la componente conexa de e_G . Entonces:

- i) Si G es totalmente desconexo, entonces toda vecindad de e_G contiene un subgrupo compacto y abierto de G .
- ii) C es la intersección de todos los subgrupos abiertos de G .

Si G es compacto, los subgrupos en I) y II) se pueden elegir normales con índices finitos.

DEMOSTRACIÓN: Para probar i), el [Teorema de Vedenissov \(1.1.11.7\)](#) nos garantiza que un espacio localmente compacto y totalmente desconexo, es cero dimensional. Así, G tiene una base para e_G de abiertos y cerrados. Combinando lo anterior con el hecho de que G localmente compacto, podemos disponer de una base para e_G de abiertos y cerrados compactos. De esta manera, dada U una vecindad de e_G , existe K una vecindad abierta, cerrada y compacta de e_G tal que $K \subseteq U$, luego por el [Lema 3.3.1](#) se tiene que existe un abierto V y simétrico que contiene a e_G tal que $KV \subseteq K$. Ahora bien, como $U \cap V$ es una vecindad de e_G , existe W una vecindad simétrica de e_G tal que $W \subseteq K \cap V$, así $W^2 \subseteq K$. De manera inductiva tenemos que $W^{n+1} = W^nW \subseteq KW \subseteq K$. Por lo que si $H = \bigcup_{i=1}^{\infty} W^i$, sabemos que este es un subgrupo abierto y cerrado que además por lo anterior cumple que $H \subseteq K$ y como K es compacto y H cerrado, se sigue que H es compacto.

Para la prueba de ii), sabemos que G/C es un grupo topológico localmente compacto, totalmente desconexo y de Hausdorff. De la [Proposición 3.4.1](#) tenemos que

$$\bigcap_{U \in \mathcal{I}} U = \{e_{G/C}\} = \{C\} \quad (1)$$

donde $\mathcal{I}$ es el sistema de todas las vecindades de $e_{G/C}$. Luego entonces podemos aplicar i) a G/C y usando 1), se tiene que

$$\bigcap_{H \in \mathcal{J}} H = \{C\}, \quad (2)$$

donde $\mathcal{J}$ es el sistema de todos los subgrupos abiertos de G/C . Ahora, como hay una correspondencia biyectiva entre los subgrupos abiertos de G/C y los subgrupos abiertos de G que contienen a C , mediante la función canónica $\varphi : G \rightarrow G/C$ dada por $H \mapsto \varphi(H)$, Note que de hecho todos los subgrupos abiertos de G deben contener a C . En efecto, si H es un subgrupo abierto de G , como H es cerrado, si para algún H sucediera que $C \not\subseteq H$, entonces $H \cap C$ sería un subconjunto propio abierto y cerrado de el conexo C , lo cual es una contradicción. Se sigue entonces de 2) que

$$\bigcap_{L \in \mathcal{L}} L = \bigcap_{H \in \mathcal{J}} \varphi^{-1}(H) = \varphi^{-1}(\{C\}) = C$$

donde $\mathcal{L}$ es el sistema de todos los subgrupos abiertos de G .

Finalmente, si G es compacto y U es una vecindad compacta, abierta y cerrada de e_G , se sigue por i) que existe H un subgrupo abierto y compacto de G tal que $H \subseteq U$. Sea $M = \bigcap_{x \in G} xHx^{-1}$, este es un subgrupo normal tal que $M \subseteq U$ y por el [Lema 3.9.2](#) se tiene que existe un abierto simétrico V que contiene a e_G tal que $x^{-1}Vx \subseteq H$ para todo $x \in G$, pues G es compacto y H es abierto de e_G en G . Por tanto, $V \subseteq xHx^{-1}$ para todo $x \in G$. Así $V \subseteq M$, esto implica que M es abierto. Así, G/M es discreto, y dado que M es compacto, también lo es G/M . Así G/M es un compacto discreto, esto es que G/M es finito. ■

Proposición 3.9.2. Todo grupo topológico compacto y totalmente desconexo es topológicamente isomorfo a un subgrupo cerrado de un producto de grupos discretos.

DEMOSTRACIÓN: Sea G un grupo topológico compacto y totalmente desconexo. Sea $\{K_i : i \in I\}$ una base de vecindades de e_G que consiste de subgrupos normales, abiertos y compactos. Ahora, para cada $i \in I$, sea $\varphi_i : G \rightarrow G/K_i$ la función canónica, que por la [Proposición 3.6.9](#) cada φ_i es cerrada, y G/K_i son discretos pues K_i es abierto. Luego, definimos $\psi : G \rightarrow \prod_{i=1} G/K_i$ dado por $\psi(g) = \{\varphi_i(g)\}_{i \in I}$. Es fácil ver que ψ es un homomorfismo. La continuidad se sigue de que sus componentes son funciones continuas y además es cerrada pues cada φ_i lo es. Solo restar probar que ψ es inyectiva. Sea $g \in G$ tal que $\psi(g) = \bar{0}$. Notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \psi(g) = \bar{0} &\iff \{gK_i\}_{i \in I} = \{K_i\}_{i \in I} \iff gK_i = K_i \text{ para cada } i \in I \\ &\iff g \in \bigcap_{i \in I} K_i = \{e_G\} \iff g = e_G. \end{aligned}$$

Esto último se sigue inciso ii) del [Teorema 3.9.2](#). Con esto concluimos que G es topológicamente isomorfo a $\text{Im } \psi$. ■

Teorema 3.9.3. Sea G un grupo topológico localmente compacto. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (i) G es conexo;
- (ii) G no tiene subgrupos abiertos propios;
- (iii) Para cada vecindad U de e_G , $\bigcup_{i=1} U^n = G$.

DEMOSTRACIÓN: Ya que todo subgrupo abierto es cerrado se sigue $(i) \implies (ii)$. Claramente $(ii) \implies (iii)$. Y ya que todo subgrupo abierto de G contiene a C la componente conexa de e_G , por el [Teorema 3.9.2](#), entonces $C = G$; esto establece $(iii) \implies (i)$. ■

4. SUBGRUPOS DE $\mathbb{R}^n$

El contenido de este capítulo esta basado en [5] y en este mostraremos algunos subgrupos importantes de $\mathbb{R}^n$.

4.1 Subgrupos de $(\mathbb{R}, +)$

Proposición 4.1.1. Todo subgrupo K no discreto de $(\mathbb{R}, +)$ es denso.

DEMOSTRACIÓN: Sea $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $\varepsilon > 0$, veremos que $K \cap (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \neq \emptyset$.

Notemos que en vista del Corolario 3.5.3, sabemos que 0 no es un punto aislado de K . Así, existe $x \in K \cap (0, \varepsilon)$. Consideramos el conjunto

$$C = \{n \in \mathbb{Z} : a - \varepsilon < nx\}$$

Es claro que C es un conjunto acotado inferiormente, además note que C es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$, por lo que existe su mínimo, digamos $c = \min C$, veremos que $cx < a + \varepsilon$, para ello, supongamos lo contrario, si $cx \geq a + \varepsilon$, entonces dado que $x < \varepsilon$ tenemos que

$$(c - 1)x = cx - x > cx - \varepsilon \geq a > a - \varepsilon$$

lo que implica que $c - 1 \in C$, contradiciendo la elección de c . Ahora, note que $cx \in K$, pues $c \in \mathbb{Z}$ y $x \in K$ y por lo probado anteriormente se tiene que $cx \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$; esto es, $cx \in K \cap (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Lo que prueba que K es denso. ■

Proposición 4.1.2. Sea G un subgrupo cerrado de $\mathbb{R}$. Entonces $G = \{0\}$, $G = \mathbb{R}$ ó G es un subgrupo discreto de la forma $a\mathbb{Z} := \{an : n \in \mathbb{Z}\}$ para algún $a \in \mathbb{R}^+$.

DEMOSTRACIÓN: Si $G \neq \mathbb{R}$, como G es cerrado, entonces G no puede ser denso y así por la proposición anterior se debe tener que G es discreto. Y si $G \neq \{0\}$, G debe contener un número positivo, digamos $k \in G \cap \mathbb{R}^+$, por lo que $[0, k] \cap G$ es un subconjunto compacto y discreto, de modo que es finito. Por lo que existe $a = \min \{(0, k] \cap G\}$. Ahora veremos que $G = a\mathbb{Z}$. Sea $x \in G$, notemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor &\leq \frac{x}{a} < \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor + 1 \\ a \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor &\leq x < a \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor + a \\ 0 &\leq x - \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor a < a \end{aligned}$$

Pero $x - \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor a \in G$, y dada la elección de a , la única posibilidad es que $x = \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor a \in a\mathbb{Z}$. ■

Usando las dos proposiciones anteriores y la [Proposición 3.5.12](#), se puede mostrar el siguiente resultado.

Corolario 4.1.1. Si $H \leq \mathbb{R}$ y H es no trivial. Entonces H es denso o tiene la forma $H = a\mathbb{Z}$ con $a \in \mathbb{R}^+$.

Proposición 4.1.3. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ es denso si y sólo si $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

DEMOSTRACIÓN: $\implies$) Supongamos que $\alpha \in \mathbb{Q}$, entonces $\alpha = \frac{a}{b}$ con $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z}^+$. Así, $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z} \subseteq \frac{1}{b}\mathbb{Z}$, de esto se deduce que $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ no es denso.

$\impliedby$) Supongamos que $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ no es denso. Entonces por el corolario anterior, se tiene que $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}$ para algún $a \in \mathbb{R}^+$, entonces $\alpha = an$ y $1 = am$ para algunos $n, m \in \mathbb{Z}$. De este modo, $\alpha = an = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$. ■

Corolario 4.1.2. Si $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces $\langle a, b \rangle$ es cerrado si y sólo si a y b son racionalmente dependientes.

DEMOSTRACIÓN: $\implies$) Supongamos que $\langle a, b \rangle$ es cerrado. Notemos que $\langle a, b \rangle \neq \{0\}$ pues a y b ambos no son cero y $\langle a, b \rangle \neq \mathbb{R}$, pues de otro modo implicaría que $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$ -espacio vectorial es de dimensión finita, lo sería una contradicción. Por lo que, por la proposición anterior se tiene que $\langle a, b \rangle = c\mathbb{Z}$ para algún $c \in \mathbb{R}^+$, por lo que $a = ct$ y $b = cs$ para algunos $t, s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, y de estas igualdades se puede deducir una combinación racional de a y b no trivial, lo que significa que a y b son racionalmente dependientes.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que a y b son racionalmente dependientes. Lo anterior es equivalente a la existencia de algún $q = \frac{t}{s} \in \mathbb{Q}$ con $t \in \mathbb{Z}$ y $s \in \mathbb{Z}^+$ tal que $a = qb$, es decir que $\langle a, b \rangle = \langle b, qb \rangle$, ahora notemos que

$$\langle b, qb \rangle = \{mb + nqb : m, n \in \mathbb{Z}\} = \left\{ \frac{ms + tn}{s} b : m, n \in \mathbb{Z} \right\};$$

esto es, los elementos de $\langle b, qb \rangle$ tienen la forma $\frac{p}{s}b$ para algún $p \in \mathbb{Z}$, y dado que el conjunto de elementos de los esta forma es cerrado y discreto, se tiene que todo subconjunto de este también es cerrado. Esto implica que en particular $\langle b, qb \rangle = \langle a, b \rangle$ es cerrado. ■

Corolario 4.1.3. Todo grupo cociente propio y de Hausdorff de $\mathbb{R}$ es topológicamente isomorfo a $\mathbb{S}^1$.

DEMOSTRACIÓN: Si $\mathbb{R}/K$ es un grupo cociente propio y Hausdorff, entonces por la [Proposición 3.6.3](#), se tiene que K es cerrado. Así, por la [Proposición 4.1.2](#), $K = a\mathbb{Z}$ para algún $a \in \mathbb{R}^+$. Como $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\psi(x) = \frac{1}{a}x$ es un isomorfismo topológico, tal que $\psi(a\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ se tiene de este modo que $\mathbb{R}/a\mathbb{Z} \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1$ ■

Corolario 4.1.4. Todos los subgrupos cerrados y propios de $\mathbb{S}^1$ son finitos.

DEMOSTRACIÓN: Identificando a $\mathbb{S}^1$ con $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ siendo $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ el homomorfismo canónico. Si $K \subsetneq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es un subgrupo cerrado, entonces $\varphi^{-1}(K)$ es un subgrupo cerrado propio de $\mathbb{R}$, de este modo por la [Proposición 4.1.2](#) se tiene que $\varphi^{-1}(K)$ es discreto y como la restricción $\varphi|_{\varphi^{-1}(K)} : \varphi^{-1}(K) \rightarrow K$ es abierta, por la [Proposición 3.6.1 iv\)](#) se tiene que K es discreto, además es compacto pues es un cerrado en el compacto $\mathbb{S}^1$. Por lo que K es finito. ■

Corolario 4.1.5. Todos los subgrupos cerrados y propios de $\mathbb{S}^1$ tienen la forma $n^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ para algún $n \in \mathbb{Z}^+$.

4.2 Subgrupos de $(\mathbb{R}^n, +)$

Habiendo analizado los subgrupos de $\mathbb{R}$, procederemos a estudiar los subgrupos cerrados de $\mathbb{R}^n$. Usando el hecho de que $\mathbb{R}^n$ es $\mathbb{R}$ -espacio vectorial.

Notación:

Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $C \subseteq \mathbb{R}$, definimos

$$\langle A \rangle_C := \{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n : n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in C, x_i \in A, i = 1, \dots, n\}$$

Con esta notación, se tiene lo siguiente:

1. $\langle A \rangle_{\mathbb{R}}$ coincide con el **subespacio generado** por A , considerando a $\mathbb{R}^n$ como $\mathbb{R}$ -espacio vectorial.
2. $\langle A \rangle_{\mathbb{Q}}$ coincide con el **subespacio generado** por A , considerando a $\mathbb{R}^n$ como $\mathbb{Q}$ -espacio vectorial.
3. $\langle A \rangle_{\mathbb{Z}}$ coincide con el **subgrupo generado** por A , considerando $(\mathbb{R}^n, +)$.

Claramente $\langle A \rangle_{\mathbb{Z}} \subseteq \langle A \rangle_{\mathbb{Q}} \subseteq \langle A \rangle_{\mathbb{R}}$. Y definimos

$$\text{rank}(A) := \dim \langle A \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Proposición 4.2.1. Si $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$ son linealmente independientes, entonces $\langle a_1, \dots, a_k \rangle_{\mathbb{Z}}$ es topológicamente isomorfo a $\mathbb{Z}^k$.

DEMOSTRACIÓN: Definimos $\Gamma : \langle a_1, \dots, a_k \rangle_{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{Z}^k$ dado por

$$\Gamma(\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k) = (\alpha_1, \dots, \alpha_k).$$

Del hecho de que $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$ son linealmente independientes, se tiene que Γ está bien definida y es biyectiva. Probaremos que Γ es un homeomorfismo. La función inversa es continua, pues $\mathbb{Z}^k$ es discreto. Si probamos que $\langle a_1, \dots, a_k \rangle_{\mathbb{Z}}$ es discreto también, tendremos la continuidad de Γ . Procedamos a probar que $\langle a_1, \dots, a_k \rangle_{\mathbb{Z}}$ es discreto. Tomemos $i \in \{1, \dots, k\}$, dado que la función $\pi_i : \langle a_1, \dots, a_k \rangle_{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\pi_i(\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k) = \alpha_i$ es continua, esto

por ser la restricción de una transformación lineal. Además, es claro que $\text{Im } \pi_i$ es un subconjunto discreto. Notemos que

$$\{\bar{0}\} = \bigcap_{j=1}^n \pi_j^{-1}(\{0\})$$

es un conjunto abierto de $\langle a_1, \dots, a_k \rangle_{\mathbb{Z}}$. Se sigue entonces que $\langle a_1, \dots, a_k \rangle_{\mathbb{Z}}$ es discreto. ■

Proposición 4.2.2. Dado $G \leq \mathbb{R}^n$ un subgrupo discreto de rango p y siendo $a_1, \dots, a_p \in G$ una base para $\langle G \rangle_{\mathbb{R}}$. Sea P el hiperparalelepípedo cerrado con centro en 0 y con vectores base $a_1, \dots, a_p$, esto es,

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^p r_i a_i : r_i \in [-1, 1], i = 1, \dots, p \right\}$$

Entonces $G \cap P$ es finito y $\langle G \cap P \rangle_{\mathbb{Z}} = G$. Más aún, cada punto de G es una combinación lineal de $a_1, \dots, a_p$ con coeficientes racionales; es decir, $G \subseteq \langle a_1, \dots, a_p \rangle_{\mathbb{Q}}$.

DEMOSTRACIÓN: Por un lado, la [Proposición 3.5.12](#) garantiza que G es cerrado. Luego, como P es compacto y $G \cap P$ es cerrado, se sigue que $G \cap P$ es compacto, y como además es discreto, se sigue que $G \cap P$ es finito.

Por otra parte, como $G \subseteq \langle G \rangle_{\mathbb{R}}$, se tiene que para $x \in G$, existen $\beta_1, \dots, \beta_p \in \mathbb{R}$ tales que

$$x = \sum_{i=1}^p \beta_i a_i$$

Ahora, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, definimos

$$z_n = nx - \sum_{i=1}^p [n\beta_i] a_i = \sum_{i=1}^p (n\beta_i - [n\beta_i]) a_i$$

y dado que cada $0 \leq n\beta_i - [n\beta_i] < 1$, se sigue que $z_n \in P$. Luego

$$x = z_1 + \sum_{i=1}^p [\beta_i] a_i$$

lo que significa que $\langle G \cap P \rangle_{\mathbb{Z}} = G$.

Dado que cada $z_n \in G \cap P$ y $G \cap P$ es finito, se deduce que deben existir $k, n \in \mathbb{Z}^+$ distintos tales que $z_k = z_n$. Esto implica que

$$\begin{aligned} z_k &= \sum_{i=1}^p (k\beta_i - \lfloor k\beta_i \rfloor) a_i = \sum_{i=1}^p (n\beta_i - \lfloor n\beta_i \rfloor) a_i = z_n \\ \implies \sum_{i=1}^p ((n-k)\beta_i + (\lfloor k\beta_i \rfloor - \lfloor n\beta_i \rfloor)) a_i &= 0, \end{aligned}$$

y debido a que los vectores $a_1, \dots, a_p$ son linealmente independientes, se sigue que $(n-k)\beta_i = \lfloor n\beta_i \rfloor - \lfloor k\beta_i \rfloor$, por lo que $\beta_i \in \mathbb{Q}$ para cada $i \in \{1, \dots, p\}$. Esto implica que $G \subseteq \langle a_1, \dots, a_p \rangle_{\mathbb{Q}}$. ■

Corolario 4.2.1. Sean $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}^n$ vectores linealmente independientes, y $b = \sum_{i=1}^p \beta_i a_i$ con $\beta_i \in \mathbb{R}$. Entonces $\langle a_1, \dots, a_p, b \rangle_{\mathbb{Z}}$ es discreto si y sólo si $\beta_i \in \mathbb{Q}$.

DEMOSTRACIÓN: $\implies$) Supongamos que $K = \langle a_1, \dots, a_p, b \rangle_{\mathbb{Z}}$ es discreto. Primero notemos que

$$\langle a_1, \dots, a_p, b \rangle_{\mathbb{R}} = \langle a_1, \dots, a_p \rangle_{\mathbb{R}}$$

lo que implica que $a_1, \dots, a_p$ es una base de $\langle a_1, \dots, a_p, b \rangle_{\mathbb{R}}$. De la proposición anterior se tiene que $K \subseteq \langle a_1, \dots, a_p \rangle_{\mathbb{Q}}$. Por lo que existen $q_1, \dots, q_p \in \mathbb{Q}$ tales que

$$b = \sum_{i=1}^p q_i a_i$$

pero $b = \sum_{i=1}^p \beta_i a_i$, y debido a que $a_1, \dots, a_p$ son linealmente independientes se sigue que $\beta_i = q_i$, es decir que $\beta_i \in \mathbb{Q}$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\beta_i \in \mathbb{Q}$. De esta manera, $\beta_i = \frac{r_i}{s_i}$ para algunos $r_i \in \mathbb{Z}$ y $s_i \in \mathbb{Z}^+$. Ahora, consideremos para cada $i \in \{1, \dots, p\}$ las siguientes transformaciones lineales,

$$\Gamma_i : \langle a_1, \dots, a_p \rangle_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por $\Gamma_i(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p) = \lambda_i$. Sabemos que cada Γ_i es una función

continua. Por lo que la función

$$\Gamma_i^r = \Gamma_i|_{\langle a_1, \dots, a_p, b \rangle_{\mathbb{Z}}} : \langle a_1, \dots, a_p, b \rangle_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

es continua para cada $i \in \mathcal{I}_p$. Entonces para $\sum_{j=1}^p \alpha_j a_j + \beta b \in \langle a_1, \dots, a_p, b \rangle_{\mathbb{Z}}$ con $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$\Gamma_i \left(\sum_{j=1}^p \alpha_j a_j + \beta b \right) = \Gamma_i \left(\sum_{j=1}^p (\alpha_j + \beta \beta_j) a_j \right) = \alpha_i + \beta \beta_i = \frac{\alpha_i s_i + \beta r_i}{s_i}.$$

Lo que implica que $\text{Im } \Gamma_i^r \subseteq \left\{ \frac{n}{s_i} : n \in \mathbb{Z} \right\}$; este último conjunto es discreto en $\mathbb{R}$, y por tanto $\text{Im } \Gamma_i^r$ es discreto. Así, $\Gamma_i^{-1}(\{0\})$ es abierto. De donde,

$$\{\bar{0}\} = \bigcap_{i=1}^p (\Gamma_i^r)^{-1}(\{0\})$$

es abierto en $\langle a_1, \dots, a_p, b \rangle_{\mathbb{Z}}$. Lo que prueba que $\langle a_1, \dots, a_p, b \rangle_{\mathbb{Z}}$ es discreto. ■

Lema 4.2.1. Dados un campo K y W un K -espacio vectorial de dimensión finita n , si $\emptyset \neq E \subseteq W$ es tal que $\langle E \rangle_{\mathbb{R}} = W$, entonces existen vectores $a_1, \dots, a_n \in E$ que forman una base de W .

DEMOSTRACIÓN: Consideremos el siguiente conjunto:

$$C = \{m \in \mathbb{N} : \exists u_1, \dots, u_m \in E \text{ linealmente independientes} \}$$

Dado que $E \neq \emptyset$, se tiene que $C \neq \emptyset$. Además, el hecho de que a lo más pueden existir n vectores linealmente independientes pues $\dim W = n$, implica que C está acotado superiormente. Así, podemos considerar $a_1, \dots, a_j \in E$ linealmente independientes y máximos con esa propiedad. Probaremos que estos vectores deben ser base de W . Para ello basta probar que generan a W , pero como E genera a W , se deduce que solo es necesario probar que el conjunto $\{a_1, \dots, a_j\}$ genere a E . Sea $v \in E$, si $v \in \{a_1, \dots, a_j\}$ ya acabamos. Supongamos lo opuesto, por la elección de los vectores $a_1, \dots, a_j$ se debe tener que los vectores $a_1, \dots, a_j, v$ son linealmente dependientes, así existen

$\beta_1, \dots, \beta_{j+1} \in K$ no todos cero, tales que

$$\beta_1 a_1 + \dots + \beta_j a_j + \beta_{j+1} v = 0.$$

Note que no puede suceder que $\beta_{j+1} = 0$, pues si así fuera se tendría una combinación lineal no trivial del 0 de los vectores $a_1, \dots, a_j$ lo que contradice el que estos sean linealmente independientes. Así, $\beta_{j+1} \neq 0$, y luego

$$v = \beta_{j+1}^{-1} \beta_1 a_1 + \dots + \beta_{j+1}^{-1} \beta_j a_j \in \langle a_1, \dots, a_j \rangle_{\mathbb{R}}$$

Con esto se tiene que el conjunto $\{a_1, \dots, a_j\}$ es una base de W . Luego $j = n$, pues $\dim W = n$. ■

Lema 4.2.2. Sea V un K -espacio vectorial con dimensión n y $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq V$ una base de V . Si $\{b_1, \dots, b_n\} \subseteq V$ es otra base y $\beta_{ij} \in K$ son tales $b_i = \sum_{j=1}^n \beta_{ij} a_j$ entonces la matriz (β_{ij}) es invertible, o equivalentemente $\det(\beta_{ij}) \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN: Basta con probar que la matriz $(\beta_{ij})^T$ es invertible, y para probar esto, hay que mostrar que los vectores

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \vdots \\ \beta_{1n} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \beta_{n1} \\ \beta_{n2} \\ \vdots \\ \beta_{nn} \end{pmatrix}$$

son linealmente independientes, esto es que los vectores columna de $(\beta_{ij})^T$ son linealmente independientes. Consideremos $x_1, \dots, x_n \in K$ tales que

$$0 = \sum_{i=1}^n x_i \begin{pmatrix} \beta_{i1} \\ \beta_{i2} \\ \vdots \\ \beta_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i \beta_{i1} \\ \sum_{i=1}^n x_i \beta_{i2} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_i \beta_{in} \end{pmatrix}$$

Entonces para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^n x_i \beta_{ij} = 0$$

Ahora, consideremos

$$\sum_{i=1}^n x_i b_i = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n \beta_{ij} a_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i \beta_{ij} \right) a_j \right) = \sum_{j=1}^n 0 \cdot a_j = 0.$$

De esta manera $x_1 = \dots = x_n = 0$, pues los vectores $b_1, \dots, b_n$ son linealmente independientes. Lo que prueba que los vectores

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \vdots \\ \beta_{1n} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \beta_{n1} \\ \beta_{n2} \\ \vdots \\ \beta_{nn} \end{pmatrix}$$

son linealmente independientes. ■

Teorema 4.2.1. Todo subgrupo discreto K de $\mathbb{R}^n$ de rango p es generado por p vectores linealmente independientes, y por tanto es isomorfo a $\mathbb{Z}^p$.

DEMOSTRACIÓN: El [Lema 4.2.1](#), garantiza la existencia de una base $\{a_1, \dots, a_p\} \subseteq K$ de $\langle K \rangle_{\mathbb{R}}$. Luego, sabemos por la [Proposición 4.2.2](#) que $G = \langle g_1, \dots, g_r \rangle_{\mathbb{Z}}$ para algunos $g_1, \dots, g_r \in G$ y que $\langle G \rangle_{\mathbb{R}} = \langle a_1, \dots, a_p \rangle_{\mathbb{Q}}$. Así existen $\frac{r_{ij}}{s_{ij}} \in \mathbb{Q}$ tales que

$$g_i = \sum_{j=1}^p \frac{r_{ij}}{s_{ij}} a_j.$$

Tomando $d = \prod_{i,j} s_{ij}$, tenemos que

$$g_i = \sum_{j=1}^p \frac{r_{ij}}{s_{ij}} a_j = \sum_{j=1}^p \frac{\prod_{\substack{u,v \\ u \neq i, v \neq j}} s_{uv}}{d} r_{ij} a_j \in \left\langle \frac{a_1}{d}, \dots, \frac{a_p}{d} \right\rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Haciendo $r'_{ij} := r_{ij} \prod_{\substack{u,v \\ u \neq i, v \neq j}} s_{uv}$, y tomando vectores $b_1, \dots, b_p \in G$ linealmente

independientes se tiene que $b_i = \sum_{j=1}^p m_{ij} g_j$ para algunos $m_{ij} \in \mathbb{Z}$. Por lo que,

$$b_i = \sum_{j=1}^p m_{ij} g_j = \sum_{j=1}^p m_{ij} \left(\sum_{k=1}^p \frac{r'_{jk}}{d} a_k \right) = \sum_{k=1}^p \left(\left(\sum_{j=1}^p \frac{m_{ij} r'_{jk}}{d} \right) a_k \right).$$

Así, $b_i = \sum_{j=1}^p \beta_{ij} a_j$ con $\beta_{ij} \in \frac{1}{d} \mathbb{Z}$. Esto implica que $\det(\beta_{ij}) \in \frac{1}{d^p} \mathbb{Z}$ y por el

Lema 4.2.2, se tiene que $\det(\beta_{ij}) \neq 0$, y como el conjunto $\frac{1}{d^p} \mathbb{Z}$ es cerrado y discreto en $\mathbb{R}$, se tiene por tanto que el conjunto

$$\left\{ |\det(\beta_{ij})| : \exists b_1, \dots, b_p \in G \text{ l.i.}, b_i = \sum_{j=1}^p \beta_{ij} a_j \right\} \subseteq \frac{1}{d^p} \mathbb{Z}$$

es cerrado. De este modo contiene un mínimo positivo, pues claramente está acotado inferiormente y 0 no forma parte del conjunto. Digamos que $b_1, \dots, b_p \in G$ son vectores linealmente independientes con mínimo $|\det(\beta_{ij})|$. Veremos que $G = \langle b_1, \dots, b_p \rangle_{\mathbb{Z}}$. Supongamos lo contrario, i.e. entonces existe $g \in G$ tal que $g = \sum_{j=1}^p \lambda_j b_j$ que por la **Proposición 4.2.2** se puede suponer que $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{Q}$ con algún $\lambda_j \notin \mathbb{Z}$. Reordenando de ser necesario, podemos suponer que $\lambda_1 \notin \mathbb{Z}$, entonces $\lambda_1 = \frac{r}{s}$ con $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y $s \in \mathbb{Z}_{>1}^+$. Tomando $M \in \mathbb{Z}^+$ tal que $M < \frac{s}{|r|} + 1$, tenemos lo siguiente

$$\sum_{j=1}^p (M-1) \lambda_j b_j = (M-1)g \in G$$

y el coeficiente del primer término cumple $0 < \left| \frac{(M-1)r}{s} \right| < 1$. De esta manera, poniendo $g' := (M-1)g$, se tiene $g' = \sum_{j=1}^p \lambda'_j b_j$ con $0 < |\lambda'_1| < 1$. Haciendo $b'_1 := g'$ y $b'_i := b_i$ para $i \in \{2, \dots, p\}$. Veremos que los vectores $b'_1, \dots, b'_p$ son linealmente independientes, si $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}$ son tales que

$$0 = \sum_{j=1}^p x_j b'_j.$$

Así,

$$0 = \sum_{j=1}^p x_j b'_j = x_1 g' + \sum_{j=2}^p x_j b_i = \sum_{j=1}^p x_1 \lambda'_j b_j + \sum_{j=2}^p x_j b_i = x_1 \lambda'_1 b_1 + \sum_{j=2}^p (x_1 \lambda'_j + x_j) b_j,$$

por lo que $x_1 \lambda'_1 = 0$ y $x_1 \lambda'_j + x_j = 0$ para $j \in \{2, \dots, p\}$, pues los vectores $b_1, \dots, b_p$ son linealmente independientes, y dado que $\lambda'_1 \neq 0$, se deduce que $x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$. Lo que prueba que los vectores $b'_1, \dots, b'_p$ son linealmente independientes. Ahora determinaremos coeficientes β'_{ij} tales que $b'_i = \sum_{j=1}^p \beta'_{ij} a_j$. Como $b'_i = b_i$ para $i \in \{2, \dots, p\}$, se tiene que $\beta'_{ij} = \beta_{ij}$ para $i \in \{2, \dots, p\}$. Solo falta determinar coeficientes β'_{ij} para $i = 1$. Para ello, veamos que

$$b'_1 = g' = \sum_{i=1}^p \lambda'_i b_i = \sum_{i=1}^p \lambda'_i \left(\sum_{j=1}^p \beta_{ij} a_j \right) = \sum_{j=1}^p \left(\left(\sum_{i=1}^p \lambda'_i \beta_{ij} \right) a_j \right).$$

Lo que muestra que $\beta'_{1j} = \sum_{i=1}^p \lambda'_i \beta_{ij}$. Con esto es fácil ver que

$$(\beta'_{ij})^T = (\beta_{ij}) \begin{pmatrix} \lambda'_1 & & & 0 \\ \lambda'_2 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \lambda'_p & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Así,

$$\det(\beta'_{ij}) = \det(\beta_{ij}) \det \begin{pmatrix} \lambda'_1 & & & 0 \\ \lambda'_2 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \lambda'_p & 0 & & 1 \end{pmatrix} = \lambda'_1 \det(\beta_{ij})$$

Lo que hace que $|\det(\beta'_{ij})| = |\lambda'_1| |\det(\beta_{ij})| < |\det(\beta_{ij})|$, contradiciendo la elección de $|\det(\beta_{ij})|$. Por lo tanto $G = \langle b_1, \dots, b_p \rangle_{\mathbb{Z}}$. ■

Proposición 4.2.3. Todo subgrupo cerrado no discreto K de $\mathbb{R}^n$, contiene una línea recta que pasa por el origen.

DEMOSTRACIÓN: Ya que K no es discreto, tenemos que existe una sucesión

$\mathbf{k}_n \in K \setminus \{0\}$ tal que $\mathbf{k}_n \rightarrow 0$. Así, existe $M \in \mathbb{Z}^+$, tal que para todo $n \geq M$ se tiene $\mathbf{k}_n \in B(\bar{0}, 1)$. Luego para $n \geq M$, definimos

$$m_n := \max \{z \in \mathbb{Z}^+ : z\mathbf{k}_n \in B(\bar{0}, 1)\}$$

Dado que $K \cap \overline{B(\bar{0}, 1)}$ es un compacto pues K es cerrado y $m_n\mathbf{k}_n \in K \cap \overline{B(\bar{0}, 1)}$, se tiene que existe una subsucesión convergente de la sucesión $\{m_n\mathbf{k}_n\}$, esto es, $m_{n_j}\mathbf{k}_{n_j} \rightarrow x \in K \cap \overline{B(\bar{0}, 1)}$. Ahora, notemos que por la elección de cada m_n se tiene que

$$(m_n + 1)\mathbf{k}_n \in \mathbb{R}^n \setminus B(\bar{0}, 1).$$

Luego, para $\varepsilon > 0$, dado que $\mathbf{k}_n \rightarrow 0$ y $m_{n_j}\mathbf{k}_{n_j} \rightarrow \mathbf{x}$, se tiene la existencia de $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que para todo $n_j \geq N$ se satisface

$$\|m_{n_j}\mathbf{k}_{n_j} - \mathbf{x}\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y

$$\|\mathbf{k}_{n_j}\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por lo que,

$$\begin{aligned} \|(m_{n_j} + 1)\mathbf{k}_{n_j} - \mathbf{x}\| &= \|(m_{n_j}\mathbf{k}_{n_j} - \mathbf{x}) + \mathbf{k}_{n_j}\| \\ &\leq \|m_{n_j}\mathbf{k}_{n_j} - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{k}_{n_j}\| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Lo que muestra que la sucesión $(m_{n_j} + 1)\mathbf{k}_{n_j} \in \mathbb{R}^n \setminus B(\bar{0}, 1)$ converge a $\mathbf{x}$, y dado que $\mathbb{R}^n \setminus B(\bar{0}, 1)$ es cerrado se tiene que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus C$, pero ya sabíamos que $\mathbf{x} \in \overline{B(\bar{0}, 1)}$, por lo que $x \in \partial B(\bar{0}, 1)$, así $\mathbf{x} \neq 0$. Finalmente, probaremos que para $t \in \mathbb{R}$, $t\mathbf{x} \in K$. Sabemos que $0 \leq tm_n - \lfloor tm_n \rfloor < 1$. Luego si $\|m_n\mathbf{k}_n - \mathbf{x}\| < \varepsilon$, se tiene que $\|tm_n\mathbf{k}_n - t\mathbf{x}\| < |t|\varepsilon$. De esta manera,

$$\begin{aligned} \|\lfloor tm_n \rfloor \mathbf{k}_n - t\mathbf{x}\| &= |(\lfloor tm_n \rfloor - tm_n)\mathbf{k}_n + (tm_n\mathbf{k}_n - t\mathbf{x})| \\ &\leq |(\lfloor tm_n \rfloor - tm_n)\mathbf{k}_n| + \|(tm_n\mathbf{k}_n - t\mathbf{x})\| \\ &= |\lfloor tm_n \rfloor - tm_n| \|\mathbf{k}_n\| + \|(tm_n\mathbf{k}_n - t\mathbf{x})\| \\ &< \|\mathbf{k}_n\| + |t|\varepsilon. \end{aligned}$$

El último término se puede hacer arbitrariamente pequeño, pues $\mathbf{k}_n \rightarrow 0$, lo que prueba que la sucesión $[tm_{n_j}]\mathbf{k}_{n_j} \in K$ converge a $t\mathbf{x}$, y como K es cerrado, se tiene por tanto que $t\mathbf{x} \in K$. ■

5. EJEMPLOS IMPORTANTES

En este capítulo se presentarán algunos ejemplos importantes en la Teoría de Grupos Topológicos.

5.1 Grupos profinitos

Empezaremos con una clase de ejemplos que surgen de manera natural en distintas áreas de la matemática. El contenido de esta sección está basado en [8] y [6].

Definición. Sea un $(G_\alpha, f_\alpha^\beta, I)$ un sistema inverso de grupos. El espacio $\varprojlim G_\alpha$ es llamado un **grupo profinito** si cada espacio factor G_α es finito y discreto.

Sean G un grupo topológico y $H \subseteq G$. Se denotará por $H \trianglelefteq_O G$ si H es un subgrupo normal y abierto.

Proposición 5.1.1. Si $\mathbf{G} = \varprojlim \{G_\alpha, \varphi_\alpha^\beta, I\}$ es un grupo profinito, entonces una base de vecindades de e_G es la familia

$$\mathcal{F} = \{\ker \varphi_\alpha : \alpha \in I\}$$

donde $\varphi_\alpha : \mathbf{G} \rightarrow G_\alpha$ es la función canónica.

DEMOSTRACIÓN: Sea U un abierto tal que $e_G \in U$. Por definición, existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$ y $U_{\alpha_i} \subseteq G_{\alpha_i}$ tales que

$$e_G \in \varphi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \dots \cap \varphi_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n}) \subseteq U$$

Sea $\alpha \in I$ tal que $\alpha_1, \dots, \alpha_n \preceq \alpha$, entonces para cada $i \in \mathcal{I}_n$, se tiene que $\varphi_{\alpha_i} = \varphi_{\alpha_i}^\alpha \circ \varphi_\alpha$, así

$$e_G \in \ker \varphi_\alpha \subseteq \bigcap_{i=1}^n \varphi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}).$$



Definición. Sea $\mathcal{C}$ una clase de grupos finitos cerrada bajo isomorfismos.

1. Decimos que un grupo F es **$\mathcal{C}$ -grupo** si $F \in \mathcal{C}$.
2. Decimos que un grupo F es un **grupo pro- $\mathcal{C}$** si es el límite inverso de $\mathcal{C}$ -grupos.
3. Decimos que $\mathcal{C}$ es **cerrado bajo subgrupos (cocientes)** si cada subgrupo (cociente) de un $\mathcal{C}$ -grupo es un $\mathcal{C}$ -grupo.
4. Decimos que $\mathcal{C}$ es **cerrado bajo productos directos** si $F \times G$ es un $\mathcal{C}$ -grupo siempre que F y G sean $\mathcal{C}$ -grupos.

Teorema 5.1.1. Sea $\mathcal{C}$ es una clase de grupos finitos cerrada bajo isomorfismo, subgrupos y cerrado bajo productos directos (cada uno los grupos de la clase se consideran como espacios discretos) y sea G un grupo topológico. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- i) G es un grupo pro- $\mathcal{C}$;
- ii) G es isomorfo a un subgrupo cerrado de un producto directo de $\mathcal{C}$ -grupos;
- iii) G es compacto y $\bigcap \{N \subseteq G : N \trianglelefteq_O G, G/N \in \mathcal{C}\} = \{e\}$;
- iv) G es compacto y totalmente desconexo, y para cada $L \trianglelefteq_O G$ hay un subgrupo $N \trianglelefteq_O G$ con $N \leq L$ y $G/N \in \mathcal{C}$.

Si en adición $\mathcal{C}$ es cerrado bajo cocientes, entonces iv) puede ser remplazado por

- iv)' G es compacto y totalmente desconexo, y $G/L \in \mathcal{C}$ para cada $L \trianglelefteq_O G$.

DEMOSTRACIÓN: i) $\implies$ ii) Se sigue de la [Proposición 1.1.5.1](#).

ii) $\implies$ iii) Supongamos que G es isomorfo a un $\widehat{G}$ subgrupo cerrado de un producto $\mathbf{G} = \prod_{\alpha \in I} G_{\alpha}$ donde cada $G_{\alpha} \in \mathcal{C}$. Como $\mathbf{G}$ es compacto y $\widehat{G}$ es cerrado, se sigue que $\widehat{G}$ es compacto. Ahora, sea $\mathbf{x} \in \widehat{G} \setminus \{e\}$, entonces $\mathbf{x}(\alpha) \neq e(\alpha)$ para algún $\alpha \in I$, sea $\pi_{\alpha} : \mathbf{G} \rightarrow G_{\alpha}$ la función canónica, así $\mathbf{x} \notin \ker \pi_{\alpha}$, notemos que $\ker \pi_{\alpha} \trianglelefteq_O \mathbf{G}$, así $\ker \pi_{\alpha} \cap \widehat{G} \trianglelefteq_O \widehat{G}$ y además $\widehat{G} / \ker \pi_{\alpha}|_{\widehat{G}} \cong$

$\text{Im } \pi_\alpha|_{\widehat{G}} \leq G_\alpha$ y como $\mathcal{C}$ es cerrado bajo subgrupos, se sigue que $\widehat{G}/\ker \pi_\alpha|_{\widehat{G}} \in \mathcal{C}$.

iii) $\implies$ iv) Primero mostraremos que G es totalmente desconexo. Sea $A \subseteq G$ con más de dos elementos y $e \in A$, sea $x \notin G \setminus \{e\}$, entonces por hipótesis, existe $L \trianglelefteq_O G$ con $G/L \in \mathcal{C}$ tal que $x \notin L$, así $A = (L \cap A) \cup ((G \setminus L) \cap A)$, lo que implica que A es desconexo. Para probar la última afirmación, bastará con probar que la familia $\mathcal{I} = \{N \subseteq G : N \trianglelefteq_O G, G/N \in \mathcal{C}\}$ es una base para la topología de G . Sea U un abierto de G tal que $e \in U$, supongamos que no existe $N \in \mathcal{I}$ tal que $N \subseteq U$. Consideremos la familia $\mathcal{F} = \{N \setminus U : N \in \mathcal{I}\}$, mostraremos que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Sean $N_1, \dots, N_m \in \mathcal{I}$, es fácil ver la continuidad de la función $\varphi : G \rightarrow \prod_{i=1}^m G/N_i$ dada de forma natural. Notemos que φ es un homomorfismo con $\ker \varphi = \bigcap_{i=1}^m N_i$. Así, $G/\bigcap_{i=1}^m N_i \cong \text{Im } \varphi \leq \prod_{i=1}^m G/N_i$ y como $\mathcal{C}$ es cerrado bajo subgrupos y productos, se tiene que $\bigcap_{i=1}^m N_i \in \mathcal{C}$, así $\bigcap_{i=1}^m (N_i \setminus U) = \left(\bigcap_{i=1}^m N_i\right) \setminus U \neq \emptyset$. Esto prueba que $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de intersección finita y como G es compacto, se tiene que $\emptyset \neq \bigcap \mathcal{F} \subseteq \bigcap \mathcal{I} = \{e\}$, lo que implica que $e \notin U$, lo cual es una contradicción a la elección de U .

iv) $\implies$ i) Definimos la familia $\mathcal{I} = \{N \subseteq G : N \trianglelefteq_O G, G/N \in \mathcal{C}\}$, veamos que $\mathcal{I}$ es una base de filtro. Sean $N_1, N_2 \in \mathcal{I}$, como $G/(N_1 \cap N_2)$ es isomorfo a un subgrupo de $G/N_1 \times G/N_2$, se tiene que $N_1 \cap N_2 \in \mathcal{C}$. Sea W un abierto y cerrado de G tal que $e \in W$, entonces por el [Lema 3.5.2](#), existe $L \trianglelefteq_O G$ tal que $L \subseteq W$, luego por hipótesis, existe $N \trianglelefteq_O G$ con $N \leq L$ y tal que $G/N \in \mathcal{C}$, así $N \subseteq W$. Esto prueba que

$$\bigcap \mathcal{I} \subseteq \bigcap \{W \subseteq G : W \text{ es abierto y cerrado, } e \in W\} = \{e\}$$

Esto último se sigue del [Teorema 1.1.6.8](#). Así, por la [Proposición 3.8.11](#), se tiene que $G \cong \varprojlim \{G/N, \mathcal{F}\}$.

Finalmente, supongamos que $\mathcal{C}$ es cerrado bajo cocientes.

iv) $\implies$ iv)' Sea $L \trianglelefteq_O G$, por hipótesis, existe $N \trianglelefteq_O G$ con $N \leq L$ y tal que $G/N \in \mathcal{C}$. Como $G/L \cong (G/N)/(L/N)$ y $\mathcal{C}$ es cerrado bajo cocientes, se tiene que $G/L \in \mathcal{C}$. ■

Ahora, tomando a $\mathcal{C}$ como la clase de todos los grupos finitos, obtenemos la importante caracterización de los grupos profinitos.

Corolario 5.1.1. Sea G un grupo topológico. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- i) G es profinito;
- ii) G es isomorfo a un subgrupo cerrado de un producto de grupos finitos;
- iii) G es compacto y $\bigcap \{N : N \trianglelefteq_o G\} = \{e\}$;
- iv) G es compacto y totalmente desconexo.

Corolario 5.1.2. Sea G un grupo topológico compacto. Entonces G es profinito si y sólo si tiene una base de local subgrupos normales y abiertos.

Ejemplos:

- 1) Sea $p \in \mathbb{N}$ un número primo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el grupo cociente $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ es dotado con la topología discreta y para $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \leq m$, $\varphi_n^m : \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ es la inclusión canónica. Es fácil ver que $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \varphi_n^m, \mathbb{N})$ es un sistema inverso y a su límite inverso lo llamamos **enteros p-ádicos** y lo denotamos como $\mathbb{Z}_p := \varprojlim \{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \varphi_n^m, \mathbb{N}\}$. Contienen una copia de $\mathbb{Z}$, a saber, $\psi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_p$ dada de forma natural es un monomorfismo, para cada $n \in \mathbb{Z}$, $\psi(n) \in \mathbb{Z}_p$ lo denotaremos simplemente por n .
- 2) Para cada $n \in \mathbb{N}$, dotamos a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de la topología discreta y para cada $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n|m$, $\varphi_n^m : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es la inclusión natural. Es fácil ver que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \varphi_n^m, \mathbb{N})$ es un sistema inverso, a su límite inverso se le denota por $\widehat{\mathbb{Z}} := \varprojlim \{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \varphi_n^m, \mathbb{N}\}$, se puede probar (no es trivial) que

$$\widehat{\mathbb{Z}} \overset{\text{Top}}{\underset{\text{Iso}}{\cong}} \prod_{p \text{ primo}} \mathbb{Z}_p.$$

Definición. La función $v : \mathbb{Z}_p \setminus 0 \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $v(\mathbf{x}) = \min\{n \in \mathbb{N} : x(n) \neq p^n\mathbb{Z}\}$ se llama **orden p-ádico**.

Proposición 5.1.2. El grupo $\mathbb{Z}_p^\times$ de elementos invertibles consiste de los siguientes elementos:

$$\mathbb{Z}_p^\times = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_p : \mathbf{x}(1) \neq p\mathbb{Z}\}.$$

DEMOSTRACIÓN: Si $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_p^\times$, por definición existe $y \in \mathbb{Z}_p$ tal que $\mathbf{x}y = 1$, así $x_1y_1 \equiv 1 \pmod{p}$, esto implica que $p \nmid x_1$, por lo que $\mathbf{x}(1) \neq p\mathbb{Z}$. Recíprocamente, si $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}_p$ es tal que $\mathbf{w}(1) \neq p\mathbb{Z}$. Construiremos $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}_p$ tal que $(\mathbf{wz})(n) = 1 + p^n\mathbb{Z}$. Como $\mathbf{w}(1) \neq p\mathbb{Z}$, entonces existe $z_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $w_1z_1 \equiv 1 \pmod{p}$. Ahora, supongamos que para $n \in \mathbb{N}$, tenemos $z_n \in \mathbb{Z}$ tal que $z_n \equiv z_m \pmod{p^m}$ para cada $m < n$ y $z_nw_n \equiv 1 \pmod{p}$. Queremos encontrar $z_{n+1} \in \mathbb{Z}$ tal que $z_{n+1} \equiv z_n \pmod{p^n}$ y $z_{n+1}w_{n+1} \equiv 1 \pmod{p^{n+1}}$. Ya que $z_{n+1} = z_n + p^nt$ para algún $t \in \mathbb{Z}$, así

$$w_{n+1}z_{n+1} = w_{n+1}z_n + p^n w_{n+1}t \equiv 1 \pmod{p^{n+1}}$$

luego como $w_{n+1}z_n \equiv 1 \pmod{p^n}$, $x_{n+1}z_n = 1 + p^na$ para algún $a \in \mathbb{Z}$. Por lo que

$$x_{n+1}y_{n+1} = 1 + p^na + p^n x_{n+1}t = 1 + p^n(a + x_{n+1} + t)$$

Esto último queremos que sea $1 \pmod{p^{n+1}}$ lo que ocurre si y sólo si

$$a + x_{n+1}t \equiv 0 \pmod{p}$$

Y dicho $t \in \mathbb{Z}$, existe pues $x_{n+1} \notin p\mathbb{Z}$. ■

Proposición 5.1.3. Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$, entonces existe $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}_p^\times$ tal que $\mathbf{x} = p^{v-1}\mathbf{u}$ donde $v = v(\mathbf{x})$.

DEMOSTRACIÓN: Definimos $\mathbf{u} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ como

$$\mathbf{u}(k) = \frac{x_{v+k-1}}{p^{v-1}} + p^k\mathbb{Z}$$

Por la compatibilidad del límite inverso, es fácil ver que $\frac{x_{v+k-1}}{p^{v-1}} \in \mathbb{Z}$, $p^{v-1}u_k = x_{v+k-1} \equiv x_k \pmod{p^k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}_p$. ■

Proposición 5.1.4. $\mathbb{Z}_p$ es un dominio de ideales principales. Específicamente, todo ideal no cero $I \subseteq \mathbb{Z}_p$ es de la forma $p^k\mathbb{Z}_p$ con $k \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN: Sea I un ideal no cero en $\mathbb{Z}_p$. Tomemos $\mathbf{x} \in I \setminus \{0\}$, por la proposición anterior tenemos que existe $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}_p^\times$ tal que $\mathbf{x} = p^{v-1}\mathbf{u}$. Así, $p^{v-1} = \mathbf{x}\mathbf{u}^{-1} \in I$, por lo que $(p^{v(\mathbf{x})-1}) = p^{v(\mathbf{x})-1}\mathbb{Z}_p \subseteq I$. Recíprocamente, sea $\mathbf{w} \in I$ tal que $v(\mathbf{x}) > v(\mathbf{w})$ (si $v(\mathbf{w}) \leq v(\mathbf{x})$ es fácil ver que $\mathbf{w} \in (p^{v(\mathbf{x})-1})$). Escribimos

$$\mathbf{w} = p^{v(\mathbf{w})-1}\mathbf{v}' = p^{v(\mathbf{x})-1}p^{v(\mathbf{w})-k}\mathbf{v}' \in p^{v(\mathbf{x})-1}\mathbb{Z}_p.$$

Esto prueba que $I = p^{v(\mathbf{x})-1}\mathbb{Z}_p$. ■

Proposición 5.1.5. Los únicos subgrupos cerrados de $\mathbb{Z}_p$ son 0 y $p^k\mathbb{Z}_p$ con $k \geq 0$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathbf{H}$ un subgrupo no cero y cerrado de $\mathbb{Z}_p$. Sea $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}_p$, entonces $\mathbb{Z}\mathbf{h} \subseteq \mathbf{H}$. Es fácil ver que

$$\mathbb{Z}_p\mathbf{h} \subseteq \overline{\mathbb{Z}\mathbf{h}} \subseteq \overline{\mathbf{H}} = \mathbf{H}.$$

Esto prueba que $\mathbf{H}$ es un ideal de $\mathbb{Z}_p$. Así, la conclusión del resultado se sigue de la proposición anterior. ■

5.2 Grupos de matrices

Sean $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ y $n \in \mathbb{N}$. El **grupo general lineal de tamaño n** es el conjunto $GL(n, K) = \{\mathbf{A} \in M(n, K) : \det A \neq 0\}$. El que $GL(n, K) \leq M(n, K)$ se sigue de que para $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M(n, K)$ se satisface $\det AB = \det A \cdot \det B$.

Ahora introduciremos algunos de los subgrupos importantes de $GL(n, K)$.

Definición. 1) El **grupo lineal especial**: $SL(n, K) := \{\mathbf{A} \in GL(n, K) : \det A = 1\}$.

2) El **grupo ortogonal**: $O(n, K) := \{\mathbf{A} \in GL(n, K) : \mathbf{A}^\perp \mathbf{A} = Id_n\}$

3) El **grupo ortogonal especial**: $SO(n, K) := SL(n, K) \cap O(n, K)$.

4) El **grupo unitario**: $U(n, K) := \{\mathbf{A} \in GL(n, K) : \mathbf{A}^* \mathbf{A} = Id_n\}$.

5) El **grupo unitario especial**: $SU(n, K) := SL(n, K) \cap U(n, K)$.

Definición. La **norma** de $M(n, \mathbb{C})$ la definimos como la función $\|\cdot\| : M(n, \mathbb{C}) \times M(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\sum_{(i,j) \in \mathcal{I}_n \times \mathcal{I}_n} |A_{ij}|^2}$$

Para una matriz $\mathbf{A} \in M(n, K)$, $\mathbf{A}_i$ denotará la i -ésima fila de la matriz $\mathbf{A}$ para cada $i \in \mathcal{I}_n$. Como $M(n, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2}$ mediante la función $\varphi : M(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^{n^2}$ dada por $\varphi(\mathbf{A}) = (\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n)$. Así, para probar que un subconjunto de $M(n, \mathbb{C})$ es compacto, basta con ver que es acotado y cerrado.

Proposición 5.2.1. i) Los grupos $U(n, \mathbb{C})$, $SU(n, \mathbb{C})$, $O(n, \mathbb{R})$ y $SO(n, \mathbb{R})$ son compactos.

ii) Los grupos $SL(n, K)$ y $O(n, \mathbb{C})$ no son compactos para $n \geq 2$.

DEMOSTRACIÓN:

i) Veamos que los conjuntos son acotados. Notemos que

$$SO(n, \mathbb{R}) \subseteq O(n, \mathbb{R}) \subseteq U(n, \mathbb{C})$$

y

$$SU(n, \mathbb{C}) \subseteq U(n, \mathbb{C})$$

Así, es suficiente con ver que $U(n, \mathbb{C})$ es acotado. Sea $\mathbf{B} \in U(n, \mathbb{C})$, la condición $\mathbf{B}^* \mathbf{B} = Id_n$, implica que los vectores $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n$ forman una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$. Lo que implica $\|\mathbf{A}\| \leq \sqrt{n}$.

Ahora, para mostrar que cada uno de los conjuntos son cerrados, consideremos las siguientes funciones: $f : M(n, \mathbb{C}) \rightarrow M(n, \mathbb{C})$ dada por $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^* \mathbf{A} - Id_n$ y la función $g : M(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $g(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A}$. Notemos que f y g son continuas y

$$U(n, \mathbb{C}) = f^{-1}(\mathbf{0}), \quad U(n, \mathbb{R}) = f|_{M(n, \mathbb{R})}^{-1}(\mathbf{0}) \text{ y } SL(\mathbb{R}) = g^{-1}(1)$$

Lo que implica que los conjuntos $U(n, \mathbb{C})$, $SU(n, \mathbb{C})$, $O(n, \mathbb{R})$ y $SO(n, \mathbb{R})$ son compactos.

ii) Como $SL(2, \mathbb{R}) \subseteq SL(n, K)$ y $O(2, \mathbb{C}) \subseteq O(n, K)$, basta con probar que $SL(2, \mathbb{R})$ y $O(2, \mathbb{C})$ no son acotados. Primero veamos que $SL(2, \mathbb{R})$ no está

acotado. Para $x \in \mathbb{R}$, sea

$$\mathbf{A}_x = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Claramente $\mathbf{A}_x \in SL(2, \mathbb{R})$. Tomemos $x, y \in \mathbb{R}$, entonces

$$\|\mathbf{A}_x - \mathbf{A}_y\| = |x - y|$$

De esto se deduce que $SL(2, \mathbb{R})$ no es acotado.

Ahora, para mostrar que $O(2, \mathbb{C})$ no es acotado. Consideremos para cada $t \in \mathbb{R}$, la matriz

$$\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} \cosh t & -i \sinh t \\ i \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$$

Es fácil verificar que $\mathbf{A}_t \in O(2, \mathbb{C})$. Notemos que $\|\mathbf{A}_t\| \geq |\cosh t|$ y como $\lim_{t \rightarrow \infty} \cosh t = \infty$, se concluye que $O(2, \mathbb{C})$ no es acotado. $\blacksquare$

Proposición 5.2.2. i) El grupo $U(n, \mathbb{C})$ es arco conexo.

ii) El grupo $O(n, \mathbb{R})$ tiene dos arco componentes:

$$SO(n, \mathbb{R}) \text{ y } -O(n, \mathbb{R}) = \{\mathbf{A} \in O(n, \mathbb{R}) : \det \mathbf{A} = -1\}$$

DEMOSTRACIÓN: i) Sea $\mathbf{A} \in U(n, \mathbb{C})$, por el **Teorema espectral**, existen $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{C}^n$ una base de $\mathbb{C}^n$ de eigenvectores ortonormales con eigenvectores correspondientes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tales que considerando $\mathbf{U} := (u_1, \dots, u_n) \in U(n, \mathbb{C})$ donde cada u_i se considera como columna, se tiene que

$$\mathbf{U}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{U} = \text{diag} (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Dado que $\mathbf{A} \in U(n, \mathbb{C})$, entonces se tiene que $|\lambda_j| = 1$ para cada $j \in \mathcal{I}_n$, así para cada $j \in \mathcal{I}_n$, $\lambda_j = e^{i\theta_j}$ para algún $\theta_j \in \mathbb{R}$.

Ahora, definimos $\gamma : [0, 1] \rightarrow U(n, \mathbb{C})$ dada por

$$\gamma(t) = \mathbf{U} \text{diag} (e^{it\theta_1}, \dots, e^{it\theta_n}) \mathbf{U}^{-1}$$

Notemos que $\gamma(0) = Id_n$ y $\gamma(1) = \mathbf{A}$ y es fácil ver que γ está bien definida y que es continua.

ii) Sea $\mathbf{B} \in O(n, \mathbb{R})$, entonces $\mathbf{B}^\perp \mathbf{B} = Id_n$ y así $1 = \det(\mathbf{B}^\perp \mathbf{B}) = \det \mathbf{B}^\perp \det \mathbf{B} = (\det \mathbf{B})^2$. Lo que muestra que

$$O(n, \mathbb{R}) = SO(n, \mathbb{R}) \cup -O(n, \mathbb{R})$$

Así, $O(n, \mathbb{R})$ es unión disjunta de conjuntos cerrados, de esta forma concluimos que $O(n, \mathbb{R})$ no es conexo. Ahora, mostraremos que $SO(n, \mathbb{R})$ y $-O(n, \mathbb{R})$ son arco conexos. Notemos que la arco conexidad de $-O(n, \mathbb{R})$ es una consecuencia de la arco conexidad de $SO(n, \mathbb{R})$. En efecto, sean $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in -O(n, \mathbb{R})$, entonces

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \in SO(n, \mathbb{R})$$

De está forma, si $SO(n, \mathbb{R})$ es arco conexo, existe una función continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow SO(n, \mathbb{R})$ tal que $\alpha(0) = Id_n$ y $\alpha(1) = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$, de esta forma podemos considerar la función $\eta : [0, 1] \rightarrow -O(n, \mathbb{R})$ dada por $\eta(t) = \mathbf{A} \alpha(t)$ la cuál satisface que es continua y $\eta(0) = \mathbf{A}$ y $\eta(1) = \mathbf{B}$. Ahora, mostraremos que $SO(n, \mathbb{R})$ es arco conexo. Sea $\mathbf{C} \in SO(n, \mathbb{R})$, una consecuencia del **Teorema Espectral Real** es que existe una base ortonormal $u_1, \dots, u_n$ tal que la matriz $\mathbf{U} = (u_1 \cdots u_n)$, cumple que $\mathbf{UCU}^{-1} \in SO(n, \mathbb{R})$ y tiene la forma

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \cos \alpha_m & -\sin \alpha_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \sin \alpha_m & \cos \alpha_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el determinante de cada bloque de tamaño dos es 1, entonces el determinante de la matriz anterior es el producto de -1's y además como $\det(\mathbf{UCU}^{-1}) = 1$, entonces debe haber una cantidad par de estos. Así, para cada par de -1's, escribimos

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \pi & -\sin \pi \\ \sin \pi & \cos \pi \end{pmatrix}$$

esto muestra que

$$\mathbf{UCU}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \cos \alpha_m & -\sin \alpha_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \sin \alpha_m & \cos \alpha_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, definimos $\gamma : [0, 1] \rightarrow SO(n, \mathbb{R})$ dada por

$$\gamma(t) = \mathbf{U}^{-1} \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \cos \alpha_m & -\sin \alpha_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \sin \alpha_m & \cos \alpha_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{U}$$

entonces γ satisface que es continua, $\gamma(0) = Id_n$ y $\gamma(1) = \mathbf{C}$. ■

Proposición 5.2.3. El grupo $GL(n, \mathbb{R})$ tiene dos componentes

$$GL(n, \mathbb{R})^+ = \{\mathbf{A} \in GL(n, \mathbb{R}) : \det \mathbf{A} > 0\} \text{ y } GL(n, \mathbb{R})^- = \{\mathbf{A} \in GL(n, \mathbb{R}) : \det \mathbf{A} < 0\}$$

DEMOSTRACIÓN: Ya que la función determinante es continua, se sigue que $GL(n, \mathbb{R})^+$ y $GL(n, \mathbb{R})^-$ son dos abiertos y claramente son ajenos. Probaremos que $GL(n, \mathbb{R})^+$ y $GL(n, \mathbb{R})^-$ son arco conexos. Primero notemos que la arco conexidad de $GL(n, \mathbb{R})^+$ implica la conexidad de $GL(n, \mathbb{R})^-$, entonces solo probaremos la arco conexidad de $GL(n, \mathbb{R})^+$. Primero mostraremos que si

$$\mathbf{A} \in M(n, \mathbb{R}), i \in \mathcal{I}_n \text{ y } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ entonces hay un camino de } \mathbf{A} \text{ a } \mathbf{A} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda A_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde A_i denota la i -ésima fila de $\mathbf{A}$ y λA_i es la i -ésima fila, note que está última matriz es la obtenida despues hacer una operación elemental de filas a la matriz $\mathbf{A}$. Definimos $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow M(n, \mathbb{R})$ dada por

$$\gamma(t) = \mathbf{A} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ t\lambda A_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es fácil ver que este es el camino deseado. Esto mismo se puede hacer para operaciones elementales en columnas. Además, notemos que $\det \gamma_i(t) = \det \mathbf{A}$ para cada $t \in [0, 1]$. Ahora, mostraremos que existe un camino de $\mathbf{A}$ a una matriz diagonal con entradas no cero. Usando de manera repetida los caminos que se obtuvieron anteriormente, realizamos los siguientes pasos:

- Paso 1.** Construir un camino de la matriz $\mathbf{A}$ a otra matriz $\mathbf{B}$, añadiendo un múltiplo de la n -ésima fila de $\mathbf{A}$ a otra fila de $\mathbf{A}$ de tal forma que $B_{nn} \neq 0$, esto de ser necesario. Esto se puede realizar pues $\det \mathbf{A} > 0$.
- Paso 2.** Construir un camino de la matriz $\mathbf{B}$ a una matriz $\mathbf{C}$, substrayendo a cada fila $i < n$ de $\mathbf{B}$, la n -ésima fila, de tal manera que $C_{in} = 0$ para cada $i < n$. También realizar lo mismo con columnas de tal manera que $C_{ni} = 0$ para cada $i < n$.
- Paso 3.** Aplicar los dos pasos anteriores a la submatriz superior izquierda $(n - 1) \times (n - 1)$.

Con los caminos obtenidos anteriormente, se puede contruir un camino que conecta a la matriz $\mathbf{A}$ a una matriz $D = \text{diag}(\alpha_1 \cdots \alpha_n)$ con cada $\alpha_i \neq 0$ y con determinante igual a $\det \mathbf{A}$. Como $\det \mathbf{A} > 0$, entonces la cantidad de α_i 's negativos es par. Para estos pares de números negativos se puede constuir un camino de D a una matriz diagonal D' con entradas positivas, esto se hace de la siguiente manera aplicando operaciones elementales en columnas y filas que no cambian el determinante:

$$\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -a & 0 \\ -a & -b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & b \\ -a & -b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & b \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} b & b \\ -a & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b & 0 \\ -a & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Así, tenemos un camino de $\mathbf{A}$ a una matriz $D' = \text{diag}(\alpha'_1 \cdots \alpha'_n)$ con cada $\alpha'_i > 0$. Finalmente, es fácil ver que cada α'_i se puede transformar de manera continua en 1 y manteniendo el determinante positivo. Con esto tendríamos un camino de $\mathbf{A}$ a Id_n . ■

Definición. Un anillo conmutativo con uno se dice **profinito** si es el límite inverso de anillos conmutativos con uno, finitos y discretos donde las funciones de ligadura son homomorfismos de anillos.

Proposición 5.2.4. Sea $R = \varprojlim \{R_\alpha, \varphi_\alpha^\beta, I\}$ un anillo profinito. Entonces $M(n, R)$ es un anillo profinito y $GL(n, R)$ y $SL(n, R)$ son grupos profinitos.

DEMOSTRACIÓN: Primero mostraremos que $M(n, R)$ es un anillo profinito. Para cada $\alpha, \beta \in R$ tales que $\alpha \preceq \beta$ definimos la función $\psi_\alpha^\beta : M(n, R_\beta) \rightarrow M(n, R_\alpha)$ como sigue

$$(\psi_\alpha^\beta(\mathbf{A}))_{ij} = \varphi_\alpha^\beta(A_{ij})$$

Primero verifiquemos que ψ_α^β es un homomorfismo de anillos. Sean $i, j \in \mathcal{I}_n$ y $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M(n, R_\beta)$, entonces

$$(\varphi_\alpha^\beta(\mathbf{AB}))_{ij} = \varphi_\alpha^\beta\left(\sum_{k \in \mathcal{I}_n} A_{ik} B_{kj}\right) = \sum_{k \in \mathcal{I}_n} \varphi_\alpha(A_{ik}) \varphi_\alpha(B_{kj}) = (\varphi_\alpha^\beta(\mathbf{A}) \varphi_\alpha^\beta(\mathbf{B}))_{ij}$$

Es fácil ver que $(M(n, R_\alpha), \psi_\alpha^\beta, I)$ es un sistema inverso. Ahora, definimos $\Gamma : M(n, R) \rightarrow \varprojlim \{M(n, R_\alpha), \psi_\alpha^\beta, I\}$ como

$$(\Gamma(\mathbf{A})(\alpha))_{ij} = \mathbf{A}_{ij}(\alpha)$$

Veamos que Γ está bien definida. Sean $\mathbf{A} \in M(n, R)$ y $\alpha, \beta \in I$ tales que $\alpha \preceq \beta$, hay que mostrar que $\Gamma(\mathbf{A})(\alpha) = \psi_\alpha^\beta(\Gamma(\mathbf{A})(\beta))$, sean $i, j \in \mathcal{I}_n$

$$\begin{aligned} (\Gamma(\mathbf{A})(\alpha))_{ij} &= \mathbf{A}_{ij}(\alpha) \\ &= \varphi_\alpha^\beta(\mathbf{A}_{ij}(\beta)) && \text{pues } \mathbf{A}_{ij} \in \varprojlim \{R_\alpha, \varphi_\alpha^\beta, I\} \\ &= \varphi_\alpha^\beta((\Gamma(\mathbf{A})(\beta))_{ij}) \\ &= (\psi_\alpha^\beta(\Gamma(\mathbf{A})(\beta)))_{ij} \end{aligned}$$

Es fácil ver que Γ es un homomorfismo. De manera, similar para $GL(n, R)$ y $SL(n, R)$ se puede probar que

$$GL(n, R) = \varprojlim \{GL(n, R_\alpha), \psi_\alpha^\beta|_{GL(n, R_\beta)}, I\}$$

y

$$SL(n, R) = \varprojlim \{SL(n, R_\alpha), \psi_\alpha^\beta|_{SL(n, R_\beta)}, I\}.$$

■

Ejemplos: Para un primo p

1)

$$GL(n, \mathbb{Z}_p) = \varprojlim GL(n, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

2)

$$SL(n, \mathbb{Z}_p) = \varprojlim SL(n, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

5.3 Solenoide p -ádico

El contenido de esta sección está basado en [6] y [2]. Sea $p \in \mathbb{N}$ un número primo. Para cada $n, m \in \mathbb{N}_0$ tales que $n \leq m$ definimos la función $f_n^m : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dada por $f_n^m(x + \mathbb{Z}) = p^{m-n}x + \mathbb{Z}$. Es fácil ver que $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, f_n^m, \mathbb{N})$ es un sistema inverso. El grupo topológico $\mathbf{T}_p := \varprojlim \{\mathbb{R}/\mathbb{Z}, f_n^m, \mathbb{N}\}$ le llamamos **solenoide p -ádico**.

Proposición 5.3.1. Sea $p \in \mathbb{N}$ un número primo. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, la función canónica $f_n : \mathbf{T}_p \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es un epimorfismo con $\ker f_n \stackrel{\text{Top}}{\cong} \mathbb{Z}_p \stackrel{\text{Iso}}{\cong} \mathbb{Z}_p$.

DEMOSTRACIÓN: **i)** Sea $n \in \mathbb{N}_0$, primero mostraremos que f_n es suprayectiva. Sea $x + \mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, definimos el elemento $\mathbf{u} \in \prod_{n \in \mathbb{N}_0} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ como

$$\mathbf{u}(k) = p^{n-k}x + \mathbb{Z}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Verifiquemos que $\mathbf{u} \in \mathbf{T}_p$, sean $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $a \leq b$, entonces

$$f_a^b(\mathbf{u}(b)) = f_a^b(p^{n-b}x + \mathbb{Z}) = p^{b-a}p^{n-b}x + \mathbb{Z} = p^{n-a}x + \mathbb{Z} = \mathbf{u}(a)$$

Notemos que $f_n(\mathbf{u}) = \mathbf{u}(n) = p^{n-n}x + \mathbb{Z} = x + \mathbb{Z}$. Ahora, mostraremos que $\ker f_n \cong \mathbb{Z}_p$. Definimos $\theta : \ker f_n \rightarrow \mathbb{Z}_p$ como

$$\theta(\mathbf{x})(k) = p^k x_{k+n+1} + p^k \mathbb{Z}$$

Donde $\mathbf{x}(k+n+1) = x_{k+n+1} + \mathbb{Z}$, es fácil ver que $\theta(\mathbf{x})(k)$ no depende del representante de $\mathbf{x}(k+n+1)$. Primero mostraremos que θ está bien definida, es decir, tenemos que probar que $\theta(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}_p$. Sean $\mathbf{x} \in \ker f_n$ y $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $a \leq b$, como $a+n+1 \leq b+n+1$ y $\mathbf{x} \in \mathbf{T}_p$, entonces $\mathbf{x}_{a+n+1} + \mathbb{Z} = p^{b-a} \mathbf{x}_{b+n+1} + \mathbb{Z}$, lo que implica que $\mathbf{x}_{a+n+1} - p^{b-a} \mathbf{x}_{b+n+1} \in \mathbb{Z}$, y esto implica que $p^b \mathbf{x}_{b+n+1} - p^a \mathbf{x}_{a+n+1} \in p^a \mathbb{Z}$. Esto prueba que $\theta(\mathbf{x})(a) + p^a \mathbb{Z} = \theta(\mathbf{x})(b) + p^a \mathbb{Z}$. Ahora, mostraremos que θ es suprayectiva. Sea $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}_p$, definimos $\mathbf{x} \in \prod_{n \in \mathbb{N}_0} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ como

$$\mathbf{x}(k) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k \leq n \\ \frac{y_{k-n-1}}{p^{k-n-1}} + \mathbb{Z} & \text{si } \mathbf{y}(k-n-1) = y_{k-n-1} + p^{k-n-1} \mathbb{Z} \text{ y } k > n \end{cases}$$

Es fácil ver que para $k > n$, $\mathbf{x}(k)$ no depende del representante de $\mathbf{y}(k-n-1)$. Ahora, mostremos que $\mathbf{x} \in \ker f_n$, por construcción de $\mathbf{x}$ solo resta probar que $\mathbf{x} \in \mathbf{T}_p$. Sea $l \in \mathbb{N}_0$, hay que mostrar que $\mathbf{x}(l) = p\mathbf{x}(l+1)$, si $l+1 \leq n$ la compatibilidad es clara, si $l = n$, entonces tenemos

$$p\mathbf{x}(n+1) = p \frac{y_0}{p^0} + \mathbb{Z} = py_0 + \mathbb{Z} = \mathbb{Z} = \mathbf{x}(n)$$

Ahora, supongamos que $l > n$, como $l-n-1 < l+1-n-1 = l-n$ y $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}_p$, entonces se tiene que $y_{l-n-1} + p^{l-n-1} \mathbb{Z} = y_{l-n} + p^{l-n-1} \mathbb{Z}$, lo que implica que $y_{l-n-1} - y_{l-n} \in p^{l-n-1} \mathbb{Z}$, así

$$y_{l-n-1} - y_{l-n} = p^{l-n-1} z$$

para algún $z \in \mathbb{Z}$, por lo que $\frac{y_{l-n-1}}{p^{l-n-1}} - \frac{y_{l-n}}{p^{l-n-1}} = z$. Esto implica que $p\mathbf{x}(l+1) = \mathbf{x}(l)$. Es fácil ver que $\theta(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.

Ahora probaremos que θ es inyectiva. Sea $\mathbf{x} \in \ker \theta$, entonces para cada $k \in \mathbb{N}_0$, tenemos que $p^k x_{k+n+1} \in p^k \mathbb{Z}$. Esto implica que $x_{k+n+1} \in \mathbb{Z}$. Así, $\mathbf{x} = 0$.

Solo resta probar la continuidad de θ . Sean $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_m : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ la función canónica. Sabemos que $\ker \varphi_m$ es un abierto básico de la topología de $\mathbb{Z}_p$ conteniendo a 0. Mostraremos que $\theta^{-1}(\ker \varphi_m)$ es un abierto en $\ker f_n$. Sea $\eta \in \left(0, \frac{1}{p^{m-n}}\right)$. Note que solo es necesario probar que $f_m(\ker f_n \cap f_m^{-1}((-\eta, \eta)/\mathbb{Z})) = \{\mathbb{Z}\}$. Sea $\mathbf{x} \in \ker f_n \cap f_m^{-1}((-\eta, \eta)/\mathbb{Z})$ con $\mathbf{x}(m) \neq \mathbb{Z}$, como $\mathbf{x} \in \ker f_n$, tenemos que $p^{m-n}x_m \in \mathbb{Z}$, así $x_m = \frac{z}{p^{m-n}}$ para algún $z \in \mathbb{Z}$ y como $\mathbf{x} \in f_m^{-1}((-\eta, \eta)/\mathbb{Z})$, tenemos que $x_m - \lfloor x_m \rfloor \in (-\eta, \eta)$, así $x_m \in (\lfloor x_m \rfloor - \eta, \lfloor x_m \rfloor + \eta)$, entonces

$$\frac{z}{p^{m-n}} = x_m \in (\lfloor x_m \rfloor - \eta, \lfloor x_m \rfloor + \eta)$$

De esto, si $\eta \in \left(0, \frac{1}{p^{m-n}}\right)$, $x_m \in \mathbb{Z}$. De aquí obtenemos una contradicción. ■

Proposición 5.3.2. Existe $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{T}_p$ un monomorfismo continuo y con $\chi(\mathbb{R})$ denso en $\mathbf{T}_p$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ la función canónica. Definimos $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{T}_p$ dada por $\chi(x)(k) = \varphi\left(\frac{x}{p^k}\right) = \frac{x}{p^k} + \mathbb{Z}$. Es fácil ver que χ está bien definida y que es un homomorfismo. Mostraremos primero que χ es inyectiva. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $\chi(x)$, esto implica que $\frac{x}{p^k} \in \mathbb{Z}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, así $x \in \mathbb{Z}$ y es tal que $p^k|x$ para todo $k \in \mathbb{N}$, de esto se deduce que $x = 0$. Ahora, mostraremos que χ es continua. Sean $x \in \mathbb{R}$ y U un abierto en $\mathbf{T}_p$ tal que $\chi(x) \in U$, entonces por la [Proposición 1.1.5.3](#), existe $n \in \mathbb{N}$ y $W \subseteq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ un abierto tal que $\chi(x) \in f_n^{-1}(W) \subseteq U$. Por definición de topología cociente tenemos que $\varphi^{-1}(W)$ es un abierto de $\mathbb{R}$, $\frac{x}{p^n} \in \varphi^{-1}(W)$, pues $\frac{x}{p^n} + \mathbb{Z} = \chi(x)(n) \in W$, de este modo $x \in p^n \varphi^{-1}(W)$ y este último conjunto es un abierto de $\mathbb{R}$. Veamos que $\chi(p^n \varphi^{-1}(W)) \subseteq f_n^{-1}(W)$, sea $y = p^n w$ con $w \in \varphi^{-1}(W)$, entonces $\chi(y)(n) = \frac{p^n w}{p^n} + \mathbb{Z} = w + \mathbb{Z} \in W$. Esto prueba la continuidad de χ .

Finalmente probaremos que $\chi(\mathbb{R})$ es denso en $\mathbf{T}_p$. De la [Proposición 1.1.5.4](#) basta con probar que para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n(\chi(\mathbb{R})) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Sean $x + \mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, es fácil ver que $f_n(\chi(p^n x)) = x + \mathbb{Z}$. ■

El siguiente resultado se sigue de la proposición anterior y el [Teorema 1.1.6.4](#).

Corolario 5.3.1. $\mathbf{T}_p$ es conexo.

Proposición 5.3.3. Para cada $m \in \mathbb{N}$ primo relativo con p , $\mathbf{T}_p$ tiene un único subgrupo cíclico C_m de orden m .

DEMOSTRACIÓN: *Existencia.* Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos $a_k \in \mathbb{Z}$ como el único entero $\bmod m$ tal que $a_k p^k \equiv 1 \bmod m$, la existencia de dicho entero se sigue de que m es primo relativo a p . Tomamos $a_0 = 1$. Definimos $\mathbf{x} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ como

$$\mathbf{x}(k) = \frac{a_k}{m} + \mathbb{Z}$$

Es inmediato que para cada $k \in \mathbb{N}$, $pa_k = a_{k+1}$, lo que implica que $\mathbf{x} \in \mathbf{T}_p$. Veamos que el orden de $\mathbf{x}$ es m . Es fácil ver que $m\mathbf{x} = 0$. Supongamos que $n < m$, entonces $n\mathbf{x}(0) = \frac{n}{m} + \mathbb{Z}$ y como $\frac{1}{m} + \mathbb{Z}$ es de orden m en $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, se sigue que $n\mathbf{x}(0) \neq 0$.

Unicidad. Sea $\sigma : m^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbf{T}_p$ un homomorfismo. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, $(f_k \circ \sigma)(m^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) = d^{-k}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ para algún $d_k \in \mathbb{N}$ tal que $d_k | m$ y digamos que $m = d_k n_k$ para algún $n_k \in \mathbb{Z}$. Notemos que $(f_k \circ \sigma)\left(\frac{1}{m} + \mathbb{Z}\right) = \frac{n_k}{m} + \mathbb{Z}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Veremos que $\text{Im } \sigma \subseteq \langle \mathbf{x} \rangle$, para probar esto, es suficiente con mostrar que $\sigma\left(\frac{1}{m} + \mathbb{Z}\right) = n_0 \mathbf{x}$. Solo hay que probar que $n_k \equiv n_0 a_k \bmod m$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Sea $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{p^k n_k}{m} + \mathbb{Z} = (f_0^k \circ f_k)\left(\sigma\left(\frac{1}{m} + \mathbb{Z}\right)\right) = f_0\left(\sigma\left(\frac{1}{m} + \mathbb{Z}\right)\right) = \frac{n_0}{m} + \mathbb{Z}$$

De esto tenemos que

$$\begin{aligned} p^k n_k &\equiv n_0 \bmod m \\ a_k p^k n_k &\equiv a_k n_0 \bmod m \\ n_k &\equiv a_k n_0 \bmod m & a_k p^k &\equiv 1 \bmod m. \end{aligned}$$

■

Proposición 5.3.4. Existe una función $\Psi : [0, 1] \times \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbf{T}_p$ continua y suprayectiva.

DEMOSTRACIÓN: Definamos $\Psi(t, \mathbf{x}) = \chi(t) + \theta^{-1}(\mathbf{x})$. Por la [Proposición 3.1.6](#) se sigue que Ψ es continua. Mostraremos que $\text{Im } \Psi$ es densa en $\mathbf{T}_p$, por la [Proposición 1.1.5.5](#), basta ver que para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n(\text{Im } \Psi)$ es un conjunto denso en $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, de hecho cada $f_n(\text{Im } \Psi) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, lo cuál es fácil de verificar. Como $[0, 1] \times \mathbb{Z}_p$ es compacto y $\text{Im } \Psi$ es denso en $\mathbf{T}_p$, se sigue que Ψ es suprayectiva. ■

Proposición 5.3.5. Para cada $k \in \mathbb{N}$, hay un único subgrupo $\mathbf{H}_k \subseteq \mathbf{T}_p$ tal que $f_0(\mathbf{H}_k) = p^{-k}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$. Este subgrupo es $\mathbf{H} = f_0^{-1}(p^{-k}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathbf{K} \leq \mathbf{T}_p$ tal que $f_0(\mathbf{K}) = p^{-k}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$. Es fácil ver que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(\mathbf{H}) = \left\langle \frac{1}{p^{k+n}} + \mathbb{Z} \right\rangle.$$

Además, tenemos que $(f_0^n \circ f_n)|_{f_n(\mathbf{K})} : f_n(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{H}$ es suprayectiva y como $\ker(f_0^n \circ f_n)|_{f_n(\mathbf{K})}$ es de orden p^n , se sigue que $f_n(\mathbf{K})$ tiene orden p^{n+k} y es fácil ver que $f_n(\mathbf{K}) \subseteq \left\langle \frac{1}{p^{k+n}} + \mathbb{Z} \right\rangle$, lo que implica que

$$f_n(\mathbf{K}) = \left\langle \frac{1}{p^{k+n}} + \mathbb{Z} \right\rangle = f_n(\mathbf{H}).$$

De esto se deduce que $\mathbf{K} = \mathbf{H}$. ■

Teorema 5.3.1. Los únicos subgrupos cerrados de $\mathbf{T}_p$ son:

- (1) C_m los subgrupos cíclicos de orden m primo relativo con p ($m \geq 1$).
- (2) $C_m \times p^{-k}\mathbb{Z}_p$ con m primo relativo a p y $k \in \mathbb{Z}$.
- (3) $\mathbf{T}_p$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathbf{H}$ un subgrupo cerrado de $\mathbf{T}_p$. Como $\mathbf{T}_p$ es compacto, se sigue que $\mathbf{H}$ es compacto, por lo que $f_0(\mathbf{H})$ es un subgrupo cerrado de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y por el [Corolario 4.1.5](#), solo tenemos dos posibilidades:

$$f_0(\mathbf{H}) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

ó

$$f_0(\mathbf{H}) = a^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \text{ para algún } a \in \mathbb{Z}^+$$

Si $f_0(\mathbf{H}) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, como para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $f_0 = f_0^m \circ f_n$, se deduce de esto que $f_n(\mathbf{H}) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, de esta forma por la [Proposición 1.1.5.5](#), tenemos que $\mathbf{H} = \overline{\mathbf{H}} = \mathbf{T}_p$.

Si $f_0(\mathbf{H}) = \{0\}$, entonces $\mathbf{H} \subseteq \ker f_0 \stackrel{\text{Iso}}{\cong} \mathbb{Z}_p$, y así por la [Proposición 5.1.5](#), tenemos que

$$\mathbf{H} = \{0\} \text{ ó } p^{-k}\mathbb{Z}_p \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}^+$$

Estos casos están incluidos en (2).

Ahora, supongamos que $f_0(\mathbf{H}) = a^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ no trivial. Pongamos $a = p^k m$ con $k \geq 0$ y m primo relativo con p . Entonces por **Teorema chino del residuo**, tenemos que $a^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cong m^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \times p^{-k}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$, digamos φ es este isomorfismo. Definimos $H_k = f_0|_{\mathbf{H}}^{-1}(\varphi^{-1}(\{0\} \times p^{-k}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}))$, como H_k tiene una proyección de orden p^k , se sigue por la proposición anterior que $f_0^{-1}(p^{-k}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) = H_k \subseteq \mathbf{H}$. Ahora, definimos $H_m = f_0|_{\mathbf{H}}^{-1}(\varphi^{-1}(C_m \times \{0\}))$. Usando que $\mathbb{Z}_p$ es libre de p -torsión se sigue que $f_0|_{H_m}$ y $f_0|_{H_k}$ son inyectivas y que $H_m \cap H_k = \{0\}$. De esto, se concluye que $\mathbf{H} = C_m \times p^{-k}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$.

Finalmente, si $k = 0$. Tenemos dos casos: $f_n(\mathbf{H})$ es cíclico de orden m para todo $n \in \mathbb{N}$ o hay una primera n tal que $f_n(\mathbf{H})$ contiene un elemento de orden p . En el primer caso $\mathbf{H} = C_m$ y en el segundo caso $\mathbf{H} = C_m \times p^n\mathbb{Z}_p$. ■

Definición. Un espacio topológico X que es conexo y compacto, se dice **indescomponible** cuando X no puede ser la unión de dos conjuntos compactos y conexos propios de X .

Teorema 5.3.2. $\mathbf{T}_p$ es indescomponible.

DEMOSTRACIÓN: Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos subespacios compactos y conexos de $\mathbf{T}_p$ tales que $\mathbf{T}_p = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$. Supongamos que $\mathbf{A}, \mathbf{B} \neq \mathbf{T}_p$. Luego, de la **Proposición 1.1.5.5** se sigue que $f_{n_0}(\mathbf{A}) \neq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y $f_{n_0}(\mathbf{B}) \neq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, de hecho, $f_n(\mathbf{A}) \neq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y $f_n(\mathbf{B}) \neq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ para todo $n \geq n_0$. $f_{n_0+1}(\mathbf{A})$ ó $f_{n_0+1}(\mathbf{B})$ es de la forma $I/\mathbb{Z}$ para algún intervalo $I \subseteq [0, 1]$ con longitud mayor que $\frac{1}{p}$, de esto se concluiría que $f_{n_0}(\mathbf{A})$ ó $f_{n_0}(\mathbf{B})$ es todo el espacio $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ lo cual es una contradicción. ■

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Lars Aussenhofer, Dikran Dikranjan, and Anna Giordano Bruno. *Topological Groups and the Pontryagin-van Kampen Duality: an introduction*. Walter de Gruyter GmbH and Co KG. Vol. 83 (2021).
- [2] Nicolas Bourbaki. *General topology: chapters 1–4*. Springer Science and Business Media. Vol. 18 (2013).
- [3] James Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon Inc. Boston, Mass. (1966).
- [4] Taqdir Husain. *Introduction to topological groups*. Courier Dover Publications. (2018).
- [5] Sidney A. Morris. *Pontryagin duality and the structure of locally compact abelian groups*. Cambridge University Press. Vol. 29 (1977).
- [6] Alain M Robert. *A course in p-adic analysis*. Springer Science & Business Media. Vol. 198 (2000).
- [7] Joseph J Rotman. *An introduction to the theory of groups*. Springer Science & Business Media. Vol. 148 (2012).
- [8] John S Wilson. *Profinite groups*. Clarendon Press. Vol. 19 (1998).